



Étalonnage d'un instrument d'observation spatial actif

Thibault Gayral

► To cite this version:

Thibault Gayral. Étalonnage d'un instrument d'observation spatial actif. Autre [cs.OH]. Université Nice Sophia Antipolis, 2013. Français. NNT : 2013NICE4088 . tel-00950898v2

HAL Id: tel-00950898

<https://theses.hal.science/tel-00950898v2>

Submitted on 27 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
ÉCOLE DOCTORALE STIC
SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION
ET DE LA COMMUNICATION

THÈSE

pour l'obtention du grade de

Docteur en Sciences

de l'Université de Nice - Sophia Antipolis

Mention : INFORMATIQUE

présentée et soutenue par

Thibault GAYRAL

Étalonnage d'un instrument d'observation spatial actif

Thèse dirigée par Jean-Pierre MERLET et David DANÉY

préparée au centre INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée, Projet COPRIN

soutenue le 29 novembre 2013

Jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Nicolas ANDREFF	- Prof. à Univ. de Franche-Comté
	Philippe WENGER	- D.R. CNRS à IRCCyN, Nantes
<i>Examineurs :</i>	Marc BERNOT	- THALES Alenia Space, Cannes
	David DANÉY	- C.R. à INRIA Sophia Antipolis
	Julien DUCARNE	- THALES Alenia Space, Cannes
	Jean-Pierre MERLET	- D.R. à INRIA Sophia Antipolis
<i>Invité :</i>	Yves PAPEGAY	- C.R. à INRIA Sophia Antipolis

Résumé : Une nouvelle architecture robotique parallèle de télescope d'observation spatial actif a été développée préalablement à cette thèse. Afin de pouvoir améliorer le réglage optique du télescope, la structure robotique doit pouvoir être auto-étalonnée dans l'espace, à partir des informations disponibles (mesures proprioceptives, images, *etc*). Dans un premier temps, les hypothèses nécessaires pour assurer le bon déroulement de l'étalonnage sont analysées. Cette étude théorique, appuyée par des exemples, permet de définir des conditions nécessaires à l'étalonnage. Ces conditions permettent de déterminer les précisions nécessaires sur les paramètres du modèle et l'amplitude maximale du bruit de mesure admissible pour l'étalonnage. Avec ces valeurs, un critère d'arrêt pour les algorithmes d'étalonnage ayant une réelle signification physique peut être obtenu. De plus, une normalisation de la matrice d'identification est proposée, ce qui permet l'analyse de ses valeurs singulières pour détecter les problèmes d'identifiabilité des paramètres. Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à la modélisation du télescope d'observation. Plusieurs modèles de déformation des articulations flexibles du télescope sont proposés, en considérant par exemple les équations de la théorie des poutres ou l'équilibre statique de la plate-forme. Ces modèles sont ensuite comparés expérimentalement par une analyse des résultats d'étalonnage photogrammétrique. Cette analyse permet aussi d'observer une déformation de la plate-forme mobile qui peut être approchée par l'intermédiaire de deux modèles. Le modèle géométrique du télescope est donc l'association d'un modèle physique pour les articulations flexibles et d'un modèle qui approche les déformations de la plate-forme mobile. Une fois le modèle géométrique validé, un dispositif expérimental de mesure par imagerie a été mis en place afin de simuler les images que pourrait observer le télescope une fois dans l'espace. Des modèles opto-mécaniques ont été développés afin de relier les défauts des images à la correction à apporter sur la position des actionneurs du télescope. Les résultats d'étalonnage par imagerie permettent de conclure qu'il est possible d'auto-étalonner le télescope directement dans l'espace à partir des informations disponibles.

Mots clés : Étalonnage, Robots parallèles, Identification, Articulations flexibles, Photogrammétrie, Télescope.

Calibration of an active space telescope

Abstract: A new parallel robotic architecture has previously been developed for an active space telescope. The telescope needs to be calibrated in order to improve its optical quality. This also has to be done automatically in space with the available information (proprioceptive measures, images, *etc*) which is referred as self-calibration. First, the necessary hypothesis for calibration are analyzed. This theoretical study, illustrated with examples, leads to the definition of the necessary conditions for an efficient calibration. With those conditions, the required accuracy of the model parameters and the maximal measurement noise allowed for calibration can be calculated. A physically meaningful stop criterion for the identification algorithm can also be derived and a normalization of the identification Jacobian matrix is proposed, which permits the analysis of its singular values in order to detect identifiability problems. Concerning the telescope modeling, three kinematic models taking into account the telescope flexure joint behaviors are proposed, for example using the beam theory or the static equilibrium of the mobile platform. Those models are compared through an analysis of the calibration results using photogrammetry. This analysis highlights a deformation of the mobile platform of the telescope, that was considered using two models. Thus, the kinematic model of the telescope is composed of both a model for the flexure joints and a model approaching the mobile platform deformation. This model was validated with the calibration results of photogrammetry. Finally, an experimental setup of measurement by imaging was considered in order to simulate the telescope behavior in space. Opto-mechanical models were developed in order to link the image defects to the required mechanical corrections. We showed that it is possible to calibrate those models using images data, by using Zernike polynomials. Consequently, the telescope can be self-calibrated in space with the available information.

Keywords: Calibration, Parallel robots, Identification, Flexure joints, Photogrammetry, Telescope.

Remerciements

Je ne pense pas avoir actuellement le recul nécessaire pour savoir ce que m'ont réellement apporté les personnes que j'ai côtoyées pendant ces trois années de thèse. J'ai cependant eu le temps de comprendre qu'une thèse ne pouvait être menée seul, et que le travail accompli leur revient en grande partie. C'est donc avec plaisir que je remercie les personnes ci-dessous, et m'excuse aussi par avance pour toutes celles et ceux que je pourrais oublier...

D'un point de vue scientifique, je me dois tout d'abord de remercier mes directeurs de thèse, Jean-Pierre Merlet et David Daney, pour leur présence et leur rigueur scientifique sans lesquelles ce travail n'aurait certainement pas pu aboutir. Je remercie aussi chaleureusement les membres de Thales Alenia Space : Frédéric Falzon, Julien Ducarne et Marc Bernot, pour leur réactivité, leur patience, et la qualité des informations qu'ils ont su me communiquer. Les échanges que j'ai pu avoir avec eux ont été d'une grande richesse et ils ont su me laisser la liberté nécessaire à mon travail de thèse.

Je remercie les rapporteurs Nicolas Andreff et Philippe Wenger pour le temps qu'ils m'ont consacré malgré un emploi du temps que j'imagine chargé, pour la qualité de leur relecture, ainsi que la justesse de leurs remarques.

Merci aussi à Yves Papegay qui a bien voulu faire partie de mon jury, et plus généralement à tous les membres de l'équipe COPRIN avec lesquels j'ai vécu pendant trois ans. J'ai une pensée spéciale pour Nathalie, à qui je souhaite un bon rétablissement, et je remercie Christine pour toutes les démarches administratives qu'elle a su m'épargner ! Les personnes avec lesquelles j'ai passé le plus de temps ont certainement été les autres doctorants de l'équipe. Ils ont souvent partagé mes moments de doute et m'ont été d'une grande aide pour traverser ces périodes difficiles : merci à eux tous. Je souhaite encore beaucoup de courage à Rémy et Laurent pour la suite.

La dernière partie de mes remerciements va à tous ceux qui m'ont permis, parfois, d'oublier un peu mon sujet de thèse et mes soucis de laboratoire, ou qui m'ont offert un regard extérieur sur tout ça. Je pense d'abord à mes parents qui m'ont toujours soutenu et aidé, et plus généralement à ma famille, Matthieu, Maud, Christèle, Guillaume, Titouan, Louison, Gabriel et Malo. Mes pensées vont également à mes amis Antibois, principalement Dorian, Marion et Rachelle, que j'espère bien recroiser un jour ! Et bien évidemment à tous mes amis de longue date : Claire, à qui j'adresse toutes mes félicitations, Agathe, Fanny et François, qui ont toujours été présents malgré la distance, Chachou, Marie, Julien et Mathilde pour les semaines dépayantes que nous avons passées ensemble, Coko avec qui pourtant il nous arrivait de parler robotique, Pepette pour sa récente aide précieuse, Jerem et Lolasse, pour leur aide mathématique de fin de soirée, et tous les Visanais dignes de ce nom... Durant ma thèse, je n'ai pas forcément su garder le contact avec tous : j'espère qu'ils me le pardonneront rapidement !

Antibes, le 25 Novembre 2013.
Thibault.

Table des matières

Notations utilisées	ix
1 Introduction	1
1.1 Choix d'une structure robotique parallèle	3
1.1.1 Définition des robots parallèles	3
1.1.2 Caractéristiques des robots parallèles	4
1.1.3 Un domaine d'application : la robotique spatiale	6
1.2 Validation du déploiement du télescope	7
1.3 Nécessité d'étalonnage du télescope d'observation	7
1.4 Objectifs et organisation du manuscrit	8
2 L'étalonnage : principe et problématiques	11
2.1 Introduction	12
2.2 Principe de l'étalonnage	12
2.2.1 Méthodes d'étalonnage existantes	13
2.2.2 Problématiques liées à l'étalonnage	16
2.3 Modélisation	17
2.3.1 Types d'erreurs pris en compte	17
2.3.2 Propriétés requises pour un modèle	18
2.3.3 Différents modèles utilisés	18
2.4 Mesures	19
2.4.1 Quelles informations redondantes choisir ?	20
2.4.2 Choix des configurations de mesure	21
2.5 Identification	24
2.5.1 Comment poser le problème d'identification ?	24
2.5.2 Comment résoudre les équations d'identification ?	26
2.5.3 Identifiabilité des paramètres	28
2.6 Vérification et Implantation	29
2.7 Conclusion	30
3 Étude préalable nécessaire à l'étalonnage	31
3.1 Introduction	32
3.2 Conditions nécessaires à l'étalonnage	32
3.2.1 Précision nécessaire des paramètres du modèle	32
3.2.2 Précision des mesures	35
3.2.3 Critère d'arrêt de l'algorithme d'identification	37
3.3 Détecter les problèmes d'identifiabilité des paramètres	38
3.4 Améliorer l'identifiabilité des paramètres	40
3.5 Exemple	42
3.5.1 Calcul des précisions nécessaires sur les paramètres	42

3.5.2	Calcul du bruit de mesure maximal admissible	45
3.5.3	Choix des configurations de mesure	46
3.5.4	Analyse des résultats	49
3.6	Effet des erreurs de modélisation	50
3.7	Conclusion	51
4	Modélisation du télescope d'observation spatial actif	53
4.1	Introduction	53
4.2	Spécifications du télescope	55
4.3	Architecture utilisée	56
4.4	Modélisation de la déformation de la plate-forme mobile	58
4.4.1	Analyse des données photogrammétriques	58
4.4.2	Modèle découplé	61
4.4.3	Modèle couplé	63
4.5	Modélisation des articulations flexibles	64
4.5.1	Modèles géométriques du 6-PUS	65
4.5.2	Modèle cinématique du 6-PUS	66
4.5.3	Modèle poutre pour les articulations flexibles	67
4.5.4	Modèle de raideur	71
4.6	Conclusion	75
5	Choix du modèle géométrique par étalonnage photogrammétrique	77
5.1	Introduction	78
5.2	Méthodologie utilisée	78
5.3	Protocole expérimental	79
5.3.1	Fonctions d'identification et jeux de paramètres à identifier	79
5.3.2	Choix des configurations de mesure	81
5.4	Étalonnage à partir de la pose de la plate-forme mobile	84
5.4.1	Sans prise en compte de la déformation de la plate-forme	84
5.4.2	Avec le modèle découplé de déformation de la plate-forme	89
5.4.3	Avec le modèle couplé de déformation de la plate-forme	91
5.4.4	Analyse des résultats	94
5.5	Étalonnage en prenant en compte l'orientation des jambes	96
5.5.1	Modèle et fonction d'identification utilisés	96
5.5.2	Analyse des résultats	97
5.6	Conclusions	99
6	Modélisation opto-mécanique et auto-étalonnage par imagerie	101
6.1	Introduction	102
6.2	Protocole expérimental par imagerie	103
6.2.1	Dispositif expérimental	104
6.2.2	Choix des configurations de mesure	104
6.3	Analyse des résultats par imagerie	110
6.3.1	Analyse du bruit de mesure	111

6.3.2	Effet du bruit de mesure sur les configurations mesurées	116
6.4	Modèles opto-mécaniques développés	117
6.4.1	Modèles linéaires	117
6.4.2	Modèles quadratiques	118
6.5	Résultats expérimentaux	119
6.5.1	Pour les modèles linéaires	120
6.5.2	Pour les modèles quadratiques	122
6.5.3	Effet de l'endroit du champ sur les coefficients des polynômes de Zernike	124
6.6	Choix des poses de qualité optique optimale	128
6.7	Conclusions	131
Conclusion générale		133
A Résultats d'étalonnage par imagerie		137
A.1	Pour le modèle linéaire en fonction des positions des actionneurs	137
A.2	Pour le modèle quadratique en fonction des positions des actionneurs	137
Bibliographie		141

Notations utilisées

$\boldsymbol{\rho}_p$	Vecteur des variables articulaires de la pose p
$\boldsymbol{\xi}$	Paramètres du modèle
$\Delta \boldsymbol{\xi}^{\text{nec}}$	Précision nécessaire sur les paramètres $\boldsymbol{\xi}$
$\Delta \mathbf{m}^{\text{max}}$	Précision maximale admissible sur les mesures
$\Delta \mathbf{x}_f$	Vecteur des erreurs maximales permises en valeur absolue sur les paramètres de pose
\mathbf{g}_p	Fonction d'identification de la pose p
\mathbf{m}_p	Mesures additionnelles pour la pose p
\mathbf{x}_p	Vecteur des coordonnées généralisées pour la pose p
\mathcal{W}	Espace de travail du manipulateur
σ	Valeur singulière de la matrice d'identification normalisée H_ξ
σ^G	Valeur singulière de la matrice d'identification G_ξ
G_ξ^p	Jacobienne d'identification de la pose p : $G_\xi^p = \frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \boldsymbol{\xi}}$
h	Fonction objectif pour l'identification
k	Nombre de paramètres $\boldsymbol{\xi}$ identifiables
m	Nombre de mesures par pose
N_p	Nombre total de configurations de mesure p
n_x	Nombre de degrés de liberté du manipulateur
n_ρ	Nombre d'actionneurs du manipulateur
n_ξ	Nombre de paramètres $\boldsymbol{\xi}$ du modèle

Introduction

L'imagerie par satellite a de plus en plus d'applications, que ce soit pour l'observation de la Terre ou de l'espace. Ces applications nécessitent une amélioration de la résolution au sol et/ou du temps de revisite (temps entre deux passages du télescope sur la même zone). Améliorer la résolution au sol implique une augmentation du diamètre du télescope d'observation. Diminuer le temps de revisite peut s'effectuer en utilisant plusieurs télescopes, ou en augmentant le diamètre du télescope et en choisissant une orbite plus haute ce qui permet l'obtention d'un champ de vision plus important, pour la même qualité d'image. Ainsi, il est nécessaire de développer des télescopes d'observation avec un diamètre de plus en plus important. Actuellement, obtenir un grand diamètre tout en conservant la précision optique nécessaire s'effectue par un réglage optique fin du télescope sur Terre. Ce réglage sera ensuite conservé tout au long de la vie du télescope, c'est-à-dire pendant son lancement et durant sa vie orbitale, grâce à une structure mécanique stable, robuste aux variations de température, aux radiations, ou encore au dégazage des matériaux dans l'espace. Une telle structure est néanmoins complexe, coûteuse et lourde. Un autre axe de développement possible est l'utilisation d'une structure active, qui permet d'ajuster la qualité optique du télescope dans l'espace. Cet axe de recherche est intéressant puisqu'il permet de considérer des structures moins coûteuses en terme de conception et de fabrication, ces structures n'ayant pas besoin d'une très grande stabilité pour garantir la même qualité optique. De plus, la masse du télescope peut être réduite, diminuant ainsi le coût de son lancement.

Dans ce contexte, Thales Alenia Space a développé une nouvelle architecture robotique pour un télescope d'observation spatial, en partenariat avec l'équipe COPRIN du centre INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée. Le travail réalisé dans cette thèse s'inscrit dans le cadre de ce projet.

Le projet prévoit la conception d'un télescope d'observation spatial actif, c'est-à-dire un télescope d'observation spatial dont la qualité des images peut être améliorée en utilisant un dispositif mécanique. Comme le montre la figure 1.1, la partie avant d'un télescope d'observation est composée de deux miroirs, appelés miroirs primaire (M1) et secondaire (M2), et l'image de l'objet observé est d'abord reflétée successivement par les miroirs M1 et M2 avant de rentrer dans la cavité optique du télescope et d'être captée par la caméra. La qualité de l'image générée par le télescope dépend donc du positionnement relatif de ces deux miroirs. Une façon d'améliorer la qualité des images est donc de contrôler le positionnement relatif des deux miroirs du télescope.

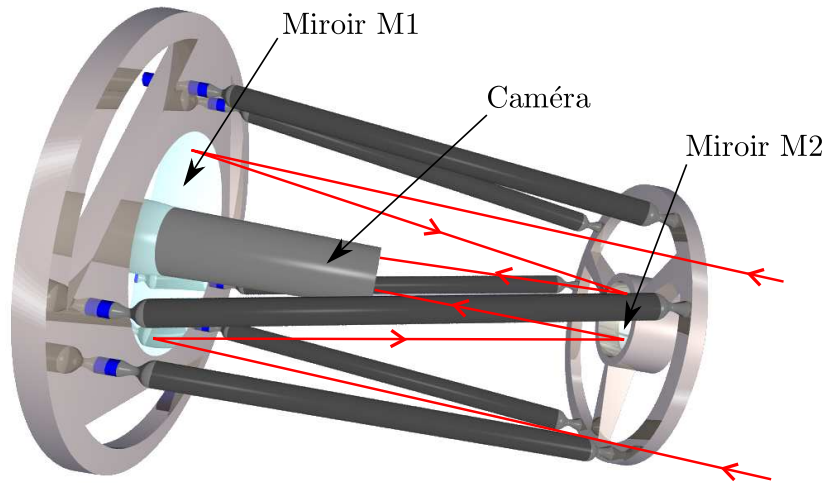


FIGURE 1.1 – Exemple d'architecture et de fonctionnement d'un télescope d'observation spatial

Le projet prévoit de plus le déploiement du télescope dans l'espace comme le montre la figure 1.2. Ceci permet de réduire la taille du télescope lors de la phase de tir, et ainsi autoriser la conception de télescopes de grandes dimensions [Bla05].

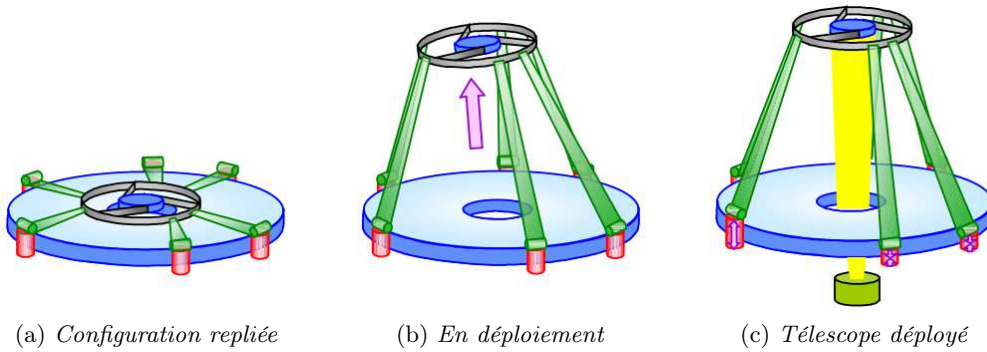


FIGURE 1.2 – Déploiement du télescope dans l'espace [Bla05]

Les synthèses architecturale et dimensionnelle du mécanisme ont été effectuées préalablement à cette thèse. De même, le déploiement du télescope a pu être validé, notamment grâce à la fabrication d'un prototype. Nous allons tout d'abord expliquer brièvement pourquoi une architecture robotique parallèle a été retenue pour la structure du télescope d'observation spatial actif. Puis, nous exposerons les conclusions des tests de déploiement. Ces conclusions montrent qu'il est nécessaire de pouvoir auto-étalonner le télescope dans l'espace, sujet qui sera traité dans cette thèse.

1.1 Choix d'une structure robotique parallèle

Afin d'obtenir la qualité d'image désirée, le positionnement relatif des deux miroirs doit pouvoir être contrôlé très finement pour atteindre une précision de l'ordre du micromètre. Cette grande précision n'est cependant à obtenir que sur un faible espace de travail : les corrections à apporter étant minimales, seul un faible mouvement du miroir secondaire par rapport au miroir primaire est nécessaire pour améliorer la qualité de l'image. Cette correction doit pouvoir être réalisée dans toutes les directions, c'est-à-dire que les 6 degrés de liberté du M2 doivent pouvoir être contrôlés. Une précédente étude a permis de définir un espace de travail de l'ordre du millimètre pour les mouvements de translation et de l'ordre du degré pour les mouvements de rotation. Le positionnement du M2 par rapport au M1 doit donc pouvoir être contrôlé avec une grande précision sur un faible espace de travail. Nous verrons que ces spécifications permettent aux robots parallèles d'être d'excellents candidats pour l'application visée.

1.1.1 Définition des robots parallèles

Définition 1 *Un robot parallèle est un mécanisme qui contrôle le mouvement de son effecteur au moyen d'au moins deux chaînes cinématiques, c'est-à-dire un assemblage de liens (ou segments) et de joints (ou articulations), allant de l'effecteur vers le bâti [ift03].*

Les robots parallèles sont à opposer aux robots sériels, mécanismes dont la chaîne cinématique est ouverte, c'est-à-dire que chacun des segments est lié à ses prédécesseur et successeur par une articulation à 1 degré de liberté [Mer06b]. Un exemple de manipulateur sériel à 4 degrés de liberté, de type Scara, est donné en figure 1.3.

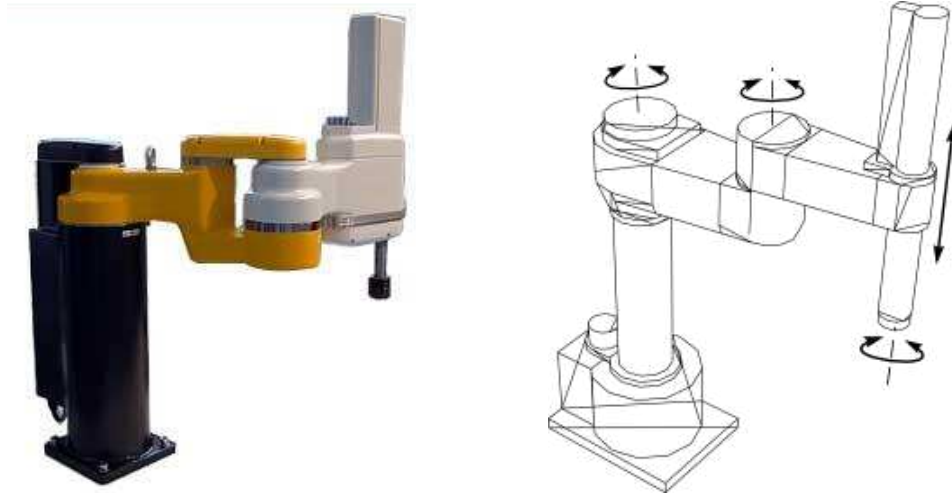


FIGURE 1.3 – Exemple d'une architecture sérielle à 4 degrés de liberté, type Scara

L'exemple le plus célèbre de robot parallèle est la plate-forme de Gough [Gou56] présentée en figure 1.4. Ce manipulateur se compose d'une base et d'une plate-forme mobile reliées entre elles par six chaînes cinématiques indépendantes. Chaque chaîne cinématique est composée

de segments reliés entre eux par une rotule, un joint de cardan et une glissière actionnée. Ce mécanisme comporte donc six actionneurs linéaires qui contrôlent les six degrés de liberté de la plate-forme mobile par rapport à la base : trois paramètres de position et trois de rotation.

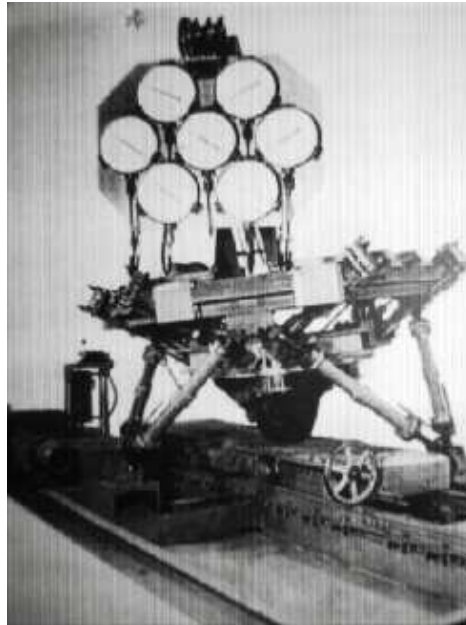


FIGURE 1.4 – *Plate-forme de Gough dans sa forme originale* [Ste65]

Il existe une multitude d’architectures différentes de robots parallèles, chacune dépendant du nombre de chaînes cinématiques composant le manipulateur, de leur composition et de leur agencement. Un aperçu plus large des différents types de robots parallèles existant peut être trouvé dans [Mer06b]. Malgré ces disparités, certaines propriétés sont inhérentes à la structure des robots parallèles et peuvent être généralisées.

1.1.2 Caractéristiques des robots parallèles

Dans une architecture robotique de type parallèle, plusieurs chaînes cinématiques relient la base à la plate-forme mobile. Ainsi, les efforts appliqués sur l’organe effecteur peuvent être repris par l’ensemble des chaînes cinématiques. De plus, les chaînes cinématiques sont moins sollicitées en flexion que dans le cas des robots sériels, ce qui permet aux robots parallèles d’acquérir une raideur importante [Mer06b]. Certaines architectures permettent aussi d’avoir l’ensemble des actionneurs situés sur la base. Un tel placement des actionneurs permet de minimiser les masses en mouvement puisque le poids des actionneurs n’a pas besoin d’être repris par ses successeurs. Ceci améliore les propriétés dynamiques des robots parallèles, ce qui permet un meilleur contrôle de la vitesse de leur organe effecteur. Ces avantages permettent aux robots parallèles d’atteindre de plus grandes vitesses de fonctionnement que les robots sériels, et en fait aussi de bons candidats pour les applications nécessitant de déplacer une lourde charge.

Les robots parallèles sont aussi réputés pour être plus précis que leurs homologues sériels, ou plus précisément que la position de leur organe effecteur est moins sensible à des erreurs de mesure sur la position des actionneurs que dans le cas de manipulateurs sériels [Mer06b], ce qui se rapprocherait plus de la définition de la répétabilité¹. Cependant, il est difficile de comparer un robot parallèle avec un robot sériel, puisque d'architectures différentes ce qui ne permet pas de définir un unique critère de comparaison : masse, empreinte au sol, espace de travail, dimensions des segments, *etc.* Une étude a récemment été menée en comparant les caractéristiques de robots parallèles et sériels plans ayant le même espace de travail [Bri07]. Cette étude semble confirmer le fait que les robots parallèles sont plus précis que les robots sériels, mais les auteurs restent très prudents quant à la généralisation de ces résultats, l'étude ne comparant que 4 robots.

En contrepartie des avantages ci-dessus, les robots parallèles présentent un espace de travail réduit par rapport à leurs homologues sériels, pour la même empreinte au sol (nous ne parlerons pas ici des robots parallèles à câbles pour lesquels un grand espace de travail peut être envisagé). En effet, le fait de relier tout ou partie des chaînes cinématiques à la base du robot implique une augmentation de la taille de cette dernière. De plus, l'espace de travail est limité par la multiplicité des chaînes cinématiques qui ne doivent pas entrer en collision. Un autre phénomène qui peut limiter l'espace de travail d'un manipulateur parallèle est la présence de singularités dites parallèles ou de type II [Mer06b]. Les singularités correspondent à des zones de l'espace de travail dans lesquelles le robot est dans une configuration géométrique particulière et est sujet à des comportements inhabituels tels que par exemple la perte ou le gain d'un ou plusieurs degrés de liberté ou encore la possibilité de mouvement de son effecteur même si les actionneurs sont bloqués [Zla98, Pas09]. Il est encore difficile de prédire l'état du robot à la sortie d'une zone de singularité, si tant est que cela soit possible, et il semble donc préférable de les éviter. Les zones de singularité peuvent être limitées lors de la phase de conception, mais conduisent souvent à un espace de travail utile plus faible [Jia08].

Un autre inconvénient des robots parallèles est que l'évaluation de la pose de l'organe effecteur à partir des mesures proprioceptives, nécessaire à la commande, est plus délicate que dans le cas des robots sériels. En effet, si les robots sériels admettent une unique solution pour leur modèle géométrique direct², la plate-forme de Gough peut admettre jusqu'à 40 solutions réelles [Rag93, Hus96]. Ainsi, la position de l'effecteur d'un robot parallèle ne peut pas toujours être déduite directement à partir des informations des capteurs proprioceptifs, et il est donc nécessaire de pouvoir connaître, ou tout du moins estimer, la pose dans laquelle se trouve l'organe effecteur pour le contrôle du robot. Même si l'étude de la commande des robots parallèles reste complexe, elle est cependant de mieux en mieux connue et ne constitue plus à l'heure actuelle un frein à leur utilisation, tout du moins pour les architectures les plus utilisées.

Il est à noter qu'afin de tirer meilleur parti des avantages et inconvénients des robots

1. La répétabilité est une valeur chiffrée caractérisant la capacité d'un robot ou manipulateur à retourner vers un point donné [Moo86]. Il faut bien faire la distinction avec la précision absolue qui est l'écart maximal entre le point atteint par le robot et le point voulu. Un robot peut avoir une très bonne répétabilité (aller toujours au même endroit) sans pour autant être précis (l'endroit atteint est loin de l'endroit désiré).

2. Le modèle géométrique direct permet le calcul des coordonnées généralisées d'un manipulateur à partir de la connaissance de ses variables articulaires [Mer06b].

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> • Raideur importante • Faible poids • Grande répétabilité • Faible inertie 	<ul style="list-style-type: none"> • Espace de travail réduit • Grande empreinte au sol • Commande complexe

TABLE 1.1 – *Avantages et inconvénients des robots parallèles par rapport aux robots sériels*

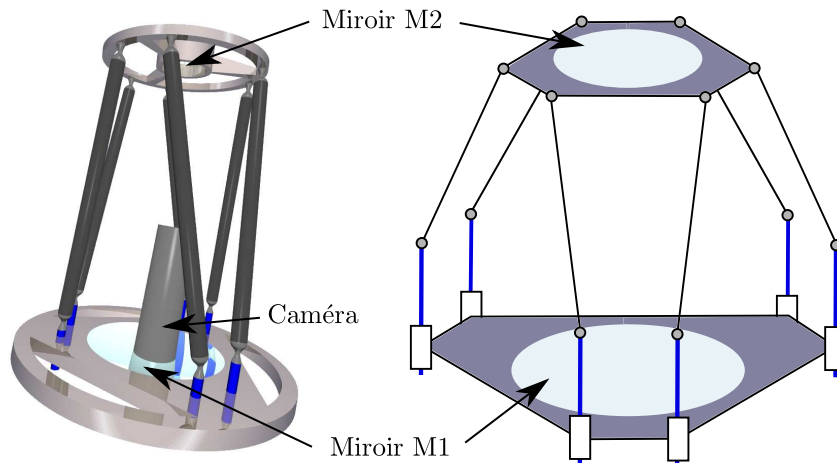
sériels et parallèles, certains auteurs proposent des robots hybrides, dont l’architecture est un mélange d’architecture sérielle et parallèle [Beh88, Koh88, Che12].

1.1.3 Un domaine d’application : la robotique spatiale

Au regard des caractéristiques des robots parallèles, ceux-ci sont principalement utilisés pour des applications nécessitant une grande vélocité, des charges importantes à déplacer et/ou une grande précision sur un faible espace de travail. Les robots parallèles trouvent donc leur place dans des applications de *pick and place* rapides [Bar08, Ger11], pour des simulateurs de mouvement [Bar78] ou encore dans la robotique médicale [Tay03, Dro11].

Dans le cadre d’un télescope d’observation spatial actif, nous avons vu que la correction de positionnement à apporter pour améliorer la qualité de l’image est souvent minime, mais doit être de grande précision. Afin d’obtenir une bonne qualité d’image, il faut donc pouvoir assurer le positionnement précis d’un des miroirs par rapport à l’autre avec des mouvements dans un espace de travail très limité. Ces spécificités permettent donc aux robots parallèles d’être d’excellents candidats pour les télescopes d’observation.

L’architecture robotique parallèle retenue dans le cadre de ce projet est une architecture de type poignet actif [Mer91b] visible en figure 1.5 et qui sera présentée plus en détail dans le chapitre 4.

FIGURE 1.5 – *Architecture de type poignet actif retenue pour le télescope d’observation spatial actif*

La synthèse dimensionnelle de cette structure a été réalisée préalablement à cette thèse

à l'aide de l'analyse par intervalles et est décrite dans [Bla05]. Les paramètres de conception ont été choisis pour satisfaire les contraintes imposées par la qualité d'image désirée en terme d'espace de travail et de précision. L'architecture de type poignet actif permet aussi le placement de l'intégralité des actionneurs sur la base du télescope, autorisant alors son déploiement comme expliqué dans la section suivante.

1.2 Validation du déploiement du télescope

L'architecture de type poignet actif est une structure robotique de type 6-PUS, où P, U et S désignent respectivement les articulations prismatique (glissière), universelle (joint de cardan) et sphérique (rotule). Seules les articulations prismatiques, fixées à la base du télescope, sont actionnées par l'intermédiaire de moteurs linéaires. Ainsi, les jambes du télescope peuvent utilement être constituées de rubans flexibles permettant son déploiement dans l'espace, comme le montre la figure 1.6. Afin de valider le possible déploiement du télescope, un prototype a été fabriqué préalablement à cette thèse.

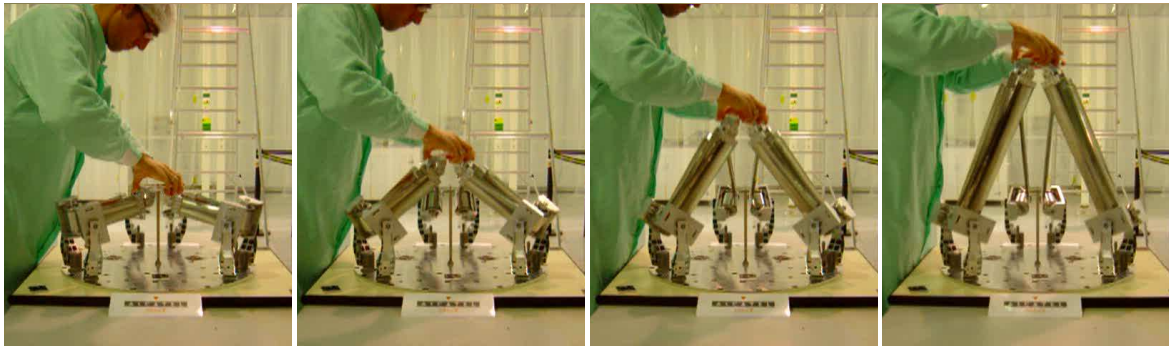


FIGURE 1.6 – Essai de déploiement d'un des prototypes du télescope

Des essais [Bla05] ont permis de valider le possible déploiement du télescope dans l'espace. Ces tests ont aussi mis en évidence que l'erreur de positionnement relatif des deux miroirs du télescope après son déploiement était supérieure à la précision requise pour garantir la qualité d'image désirée. Ce phénomène est dû au fait que le déroulement des rubans flexibles constituant les jambes du télescope n'est pas maîtrisé, ce qui implique une mauvaise connaissance de leurs longueurs finales après déploiement. Pour corriger convenablement le positionnement relatif des deux miroirs en jouant sur la position des actionneurs, il est nécessaire de pouvoir mieux estimer les paramètres géométriques réels du télescope, ou tout du moins les paramètres du modèle utilisé dans l'algorithme de commande : c'est le rôle de l'étalonnage.

1.3 Nécessité d'étalonnage du télescope d'observation

Les essais de déploiement ont permis de montrer la nécessité d'étalonnage du télescope après son déploiement. L'étalonnage permet, à partir d'informations additionnelles sur l'état du robot, d'ajuster les paramètres d'un modèle afin de minimiser les écarts entre les prédictions de ce modèle et les mesures réalisées. Les modifications des valeurs des paramètres du

modèle sont alors censées corriger les erreurs systématiques prises en compte lors de la modélisation. Afin de préparer l'étalonnage, il est donc nécessaire de modéliser la structure du télescope en prenant en compte les sources d'erreurs pouvant influencer son fonctionnement.

Dans le cadre du télescope d'observation spatial actif, étant donné que son déploiement s'effectue dans l'espace, le télescope doit pouvoir être étalonné dans l'espace. En plus de la prise en compte du déploiement des jambes du télescope, il sera alors possible de prévenir les déformations structurelles dues au lancement. Il faut toutefois s'assurer au préalable qu'il est possible d'étalonner le télescope directement depuis l'espace, à partir des informations disponibles. C'est le principal objectif de cette thèse.

Une fois déployées, les jambes du télescope ayant permis le déploiement peuvent être considérées rigides. Ainsi, un autre prototype du télescope a été fabriqué, avec les mêmes dimensions que le prototype déployable mais avec des jambes rigides. Des articulations flexibles sont considérées à la place des articulations habituelles afin de rendre la structure du télescope compatible avec l'environnement spatial qui rend délicat l'usage d'articulations classiques. Ce prototype permet d'étudier la possibilité d'*auto-étalonner* le télescope dans l'espace, c'est-à-dire la possibilité d'étalonner le télescope directement à partir des informations disponibles lorsque celui-ci est en fonctionnement, à savoir la mesure de la position de ses actionneurs et les informations qui peuvent être extraites des images générées.

1.4 Objectifs et organisation du manuscrit

L'objectif de cette thèse est de garantir la possibilité d'*auto-étalonnage* d'un télescope d'observation spatial actif à partir des mesures disponibles dans l'espace.

Le travail effectué dans cette thèse permet :

- De modéliser le comportement géométrique du télescope, notamment celui des articulations flexibles, par l'intermédiaire de plusieurs modèles (géométrique, cinématique, considérant les équations de la théorie des poutres et l'équilibre statique de la plate-forme mobile) ;
- De prendre en compte certaines sources d'erreurs géométriques non-considérées lors de la modélisation des articulations flexibles, comme la déformation de la plate-forme mobile du télescope, par l'intermédiaire de modèles non-paramétriques ;
- De valider ces modèles par une analyse des résultats d'étalonnage à partir de données de photogrammétrie ;
- De coupler le modèle géométrique précédemment validé avec un modèle optique afin de pouvoir analyser les données issues des images du télescope par l'intermédiaire d'un dispositif expérimental ;
- De valider ou d'infirmer les modèles opto-mécaniques développés par une analyse des résultats d'étalonnage par imagerie.

De plus, la précision de positionnement requise (de l'ordre du micromètre pour un prototype du télescope d'environ 0.5m) nous a amenés à nous interroger sur la qualité des mesures à effectuer pour l'étalonnage. Cette réflexion a permis de définir des conditions nécessaires à l'étalonnage pouvant se généraliser à tout autre étalonnage robotique. Ces conditions permettent le calcul de la précision nécessaire des mesures à réaliser pour l'étalonnage, afin de

garantir une certaine précision finale sur l'ensemble de l'espace de travail. Cette contribution permet aussi le calcul de la précision qu'il est nécessaire d'avoir sur les paramètres du modèle lors de l'étalonnage. En conséquence, un critère d'arrêt pour l'algorithme d'étalonnage ayant une réelle signification physique peut alors être défini. Le choix des configurations de mesure sera aussi discuté afin d'améliorer l'identifiabilité des paramètres.

Dans un premier temps, le principe de l'étalonnage des robots parallèle sera présenté, et les problématiques existantes seront expliquées dans le chapitre 2. Le développement et l'analyse des hypothèses et des équations utilisées lors de l'étalonnage permettra dans le chapitre 3 de définir les conditions nécessaires au bon déroulement du processus d'étalonnage. Ensuite, le télescope d'observation spatial actif sera présenté dans le chapitre 4 et les modèles géométriques seront développés. Les conditions nécessaires à l'étalonnage seront utilisées dans le chapitre 5 afin de valider le modèle géométrique du télescope à partir de l'analyse des résultats d'étalonnage photogrammétrique. Enfin, les modèles opto-mécaniques du télescope seront développés à partir des résultats de simulation interférométrique dans le chapitre 6, et un dispositif expérimental sera mis en place afin de permettre leur validation à partir des résultats d'étalonnage par imagerie.

L'étalonnage : principe et problématiques

Résumé : Les robots parallèles sont utilisés pour leur grande précision et raideur sur un faible espace de travail. Ces avantages sont particulièrement intéressants pour des applications de télescope spatial actif. Cependant, les erreurs accumulées, comme celles de fabrication et d'assemblage et/ou après déploiement dans notre cas, impliquent une méconnaissance des paramètres du modèle utilisé pour la commande du manipulateur et, entre autres, des erreurs de positionnement. Pour obtenir une meilleure estimation du comportement du manipulateur, il est nécessaire de recourir à une méthode d'étalonnage. L'étalonnage consiste à obtenir une meilleure estimation des paramètres du modèle, en utilisant des informations sur l'état du robot grâce à des mesures et/ou en utilisant des contraintes. Le processus d'étalonnage en robotique peut généralement être décomposé en quatre points principaux : choisir un modèle du manipulateur, choisir comment réaliser des mesures expérimentales pour obtenir des informations redondantes sur l'état du robot, identifier les paramètres du modèle, et enfin implanter ces paramètres dans le modèle utilisé pour la commande du robot.

Sommaire

2.1	Introduction	12
2.2	Principe de l'étalonnage	12
2.2.1	Méthodes d'étalonnage existantes	13
2.2.2	Problématiques liées à l'étalonnage	16
2.3	Modélisation	17
2.3.1	Types d'erreurs pris en compte	17
2.3.2	Propriétés requises pour un modèle	18
2.3.3	Différents modèles utilisés	18
2.4	Mesures	19
2.4.1	Quelles informations redondantes choisir ?	20
2.4.2	Choix des configurations de mesure	21
2.5	Identification	24
2.5.1	Comment poser le problème d'identification ?	24
2.5.2	Comment résoudre les équations d'identification ?	26
2.5.3	Identifiabilité des paramètres	28
2.6	Vérification et Implantation	29
2.7	Conclusion	30

2.1 Introduction

Pour tout manipulateur, sériel ou parallèle, le modèle choisi pour commander le robot n'est qu'une approximation de son comportement réel. En effet, même si un modèle de comportement du manipulateur qui considère l'ensemble des sources d'erreurs influençant son fonctionnement a pu être développé, ce modèle est bien souvent trop lourd pour être utilisé dans une commande temps réel du robot et doit donc être simplifié. D'autre part, il est presque impossible de considérer l'ensemble des sources d'erreurs, et nous verrons qu'un choix des principaux phénomènes à prendre en compte doit être effectué. Enfin, les paramètres utilisés dans un modèle peuvent être mal connus à cause de l'accumulation d'erreurs telles que la méconnaissance des données géométriques, les tolérances de fabrication et d'assemblage ou encore les jeux dans les liaisons. Il est donc nécessaire de mieux approcher le modèle de comportement du manipulateur pour pouvoir garantir les performances voulues sur tout l'espace de travail : c'est le rôle de l'étalonnage.

Suivant le domaine d'utilisation du manipulateur, l'étalonnage peut être effectué en statique ou en dynamique. L'étalonnage en statique permet d'améliorer un ou plusieurs critères statiques d'un manipulateur, c'est-à-dire lorsque le manipulateur est immobilisé ou en vitesse lente. A l'inverse, l'étalonnage en dynamique prend en compte les phénomènes d'accélération, de variation d'effort, ou tout autre phénomène qui ne serait pas invariant dans le temps. Dans la suite de ce document, seul l'étalonnage en statique sera considéré.

Tout d'abord, les différentes méthodes d'étalonnage existantes sont introduites. Puis chaque étape du processus d'étalonnage est détaillée selon l'approche de Mooring [Moo91], reprise par Vischer en 1996 [Vis96], qui différencie quatre grandes étapes lors d'un processus d'étalonnage : la modélisation, les mesures, l'identification et l'implantation. La phase de modélisation permet d'obtenir un modèle géométrique, cinématique, statique et/ou dynamique approprié du manipulateur pour pouvoir ensuite réaliser convenablement la phase d'identification des paramètres de ce modèle en fonction des mesures effectuées pour différentes configurations du robot. Enfin, la phase d'implantation est nécessaire pour pouvoir obtenir une commande du manipulateur en temps réel, ce qui impose souvent d'effectuer un compromis sur la complexité du modèle mis en place.

2.2 Principe de l'étalonnage

L'étalonnage en statique cherche à améliorer la précision statique¹ d'un mécanisme réel par une meilleure connaissance des paramètres du modèle choisi pour prédire son comportement. Le modèle à étalonner peut être directement celui qui sera utilisé pour la commande du robot, ou un modèle plus complexe qui sera par la suite simplifié pour assurer la commande. Afin de mieux estimer les paramètres de ce modèle, il est nécessaire d'acquérir des informations redondantes sur l'état interne du manipulateur. Ces informations supplémentaires mesurées sont alors comparées aux prédictions du modèle, ce qui permet d'en ajuster les paramètres.

1. La précision statique est une ou plusieurs valeurs qui expriment l'écart entre la pose obtenue et la pose voulue du manipulateur lorsque celui-ci est à l'arrêt [Vis96, Cor08].

2.2.1 Méthodes d'étalonnage existantes

Les mesures redondantes nécessaires au processus d'étalonnage sont principalement acquises de 3 façons différentes :

- en utilisant un appareil de mesure externe,
- grâce à l'utilisation de capteurs redondants sur une ou plusieurs articulations, capteurs venant s'ajouter aux capteurs proprioceptifs utilisés pour la commande,
- ou en contraignant le mouvement du mécanisme et en utilisant les capteurs proprioceptifs.

La façon dont sont effectuées ces mesures définit donc trois types d'étalonnage en statique : **l'étalonnage externe**, **l'auto-étalonnage** et **l'étalonnage contraint**. Nous allons examiner ces différentes méthodes dans les sections suivantes.

2.2.1.1 Étalonnage externe

Définition 2 *L'étalonnage externe consiste à utiliser un ou plusieurs appareils de mesure extéroceptifs pour obtenir tout ou partie des informations sur l'état du manipulateur [Ren03a].*

C'est la méthode la plus ancienne et sans doute encore la plus répandue. Par exemple, Vischer et Clavel étalonnent un robot Delta en utilisant un appareillage externe de mesure par contact [Vis98]. Daney *et al.* [Dan06] utilisent les mesures de position et d'orientation issues d'une caméra pour étalonner une plate-forme de Gough tandis que Meng *et al.* préfèrent l'utilisation d'un laser [Men03].

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de mesurer l'intégralité de la pose du manipulateur. Par exemple, Patel et Ehmann [Pat00] réalisent l'étalonnage d'un hexapode en utilisant seulement l'information fournie par une jambe supplémentaire mesurant la distance entre le centre de l'effecteur et un point fixe de référence. De la même façon, Takeda *et al.* [Tak04] exploitent la mesure d'une jambe supplémentaire ajoutée à un 6-RSS, mais comparent les erreurs de trajectoire circulaire grâce à l'utilisation de transformées de Fourier plutôt que l'erreur commise sur chaque pose indépendamment.

Enfin, certains auteurs proposent des techniques afin de simplifier le processus d'identification. Par exemple, Andreff et Dressler [And08] parviennent à obtenir un système d'identification linéaire en mesurant la pose et l'orientation des jambes d'une plate-forme de Gantry-Tau. Zhuang et Roth [Zhu93] proposent de bloquer la longueur d'une jambe d'une plate-forme de Gough tout en mesurant l'intégralité de la pose de l'effecteur à l'aide de capteurs extéroceptifs afin de simplifier le processus d'identification. Dans leur cas particulier, les paramètres de chaque jambe sont alors identifiés indépendamment. Cependant, une telle méthode réduit l'espace de travail mesurable, et ne considère pas l'effet couplé des paramètres [Mas97]. Conscient de ces limites, les auteurs proposent d'utiliser cette méthode, plus rapide qu'une méthode classique, lors d'une phase de pré-étalonnage.

L'étalonnage externe permet aussi de replacer le manipulateur dans un repère de mesure externe associé à l'appareil de mesure, sauf lorsque des mesures de position relative sont effectuées. Par exemple, Abtahi *et al.* proposent d'utiliser des informations de positions relatives pour étalonner un Hexaglide [Abt10]. Le protocole expérimental consiste alors à ne changer que l'orientation du manipulateur pour une certaine position. L'étalonnage est réalisé

en considérant les erreurs de positionnement observées, pour différents points de l'espace de travail. Cependant, il n'a pas été vérifié que ce processus d'étalonnage augmentait la précision absolue du manipulateur puisque la position du plateau mobile n'est jamais mesurée par rapport à une référence externe.

Même si l'étalonnage externe procure de bons résultats, cette méthode nécessite l'arrêt du fonctionnement normal du manipulateur lors de la phase d'étalonnage pour la grande majorité des appareils de mesure externes, sauf parfois dans le cas d'appareil de mesure sans contact (caméra [And01], laser [Men03], *etc*). L'arrêt du fonctionnement normal du manipulateur est peu souhaitable lors d'une stratégie industrielle de production, et des méthodes alternatives d'étalonnage ont aussi été proposées.

2.2.1.2 Auto-étalonnage

Définition 3 *Lorsque l'étalonnage est réalisé sans ajout temporaire de capteurs extéroceptifs et sans contraindre le mécanisme, on parle alors d'auto-étalonnage. C'est-à-dire que l'étalonnage est possible sans affecter le fonctionnement du manipulateur, uniquement à partir des capteurs proprioceptifs.*

L'auto-étalonnage présente l'avantage d'être une technique non-invasive, automatique et économique [Zhu97]. Cette méthode permet en outre d'enlever les dépendances induites par un instrument de mesure externe tout en garantissant un temps de mesure rapide. Cependant, elle nécessite l'ajout d'un ou plusieurs capteurs supplémentaires sur le manipulateur, ne devant pas gêner son fonctionnement. En général, les capteurs proprioceptifs sont associés aux articulations actives du mécanisme. Dans le cas de l'auto-étalonnage, il est nécessaire d'ajouter des capteurs proprioceptifs, par exemple sur les articulations passives, afin d'acquérir des informations redondantes sur l'état interne du manipulateur. Nous verrons aussi en section 2.5 que l'ajout de capteurs supplémentaires permettant de décrire l'état interne du manipulateur peut permettre de rendre la commande plus performante en diminuant la complexité de la résolution du modèle géométrique direct [Mer93a].

L'utilisation d'un seul capteur redondant ne permet l'obtention que d'une seule information supplémentaire par pose, ce qui peut affecter les résultats d'étalonnage [Dan03]. Ainsi, la plupart des méthodes d'auto-étalonnage sont réalisées grâce aux informations issues de plusieurs capteurs proprioceptifs redondants. Par exemple, Wampler *et al.* réalisent l'auto-étalonnage de deux manipulateurs parallèles à 6 degrés de liberté dans [Wam95] : un 3-6R en utilisant 3 mesures redondantes, et une structure plus classique de plate-forme de Gough modifiée 6-2RP3R avec 5 capteurs redondants. Ils montrent le lien entre le nombre de mesures redondantes, ainsi que leur qualité, et la précision finale obtenue après d'étalonnage en comparant la méthode d'auto-étalonnage avec une méthode plus classique d'étalonnage externe. Besnard et Khalil ont quant à eux fait le choix d'utiliser deux inclinomètres, pour des raisons de coût et de précision, pour étalonner une plate-forme de Gough [Bes99]. Ils tirent les conclusions que la précision des capteurs a un rôle important sur la qualité de l'étalonnage, ainsi que la qualité de leur positionnement (la perpendicularité des deux inclinomètres pour cet exemple). De plus, ils montrent que l'augmentation du nombre de poses améliore la précision, mais d'un facteur limité. A partir de 12 informations redondantes fournies par les joints de cardan, Daney auto-étalonne dans [Dan03] une structure Hexapode.

Devant ce grand nombre de mesures redondantes, l'auto-étalonnage permet alors d'obtenir une meilleure précision qu'après étalonnage externe en mesurant l'intégralité des informations de positionnement de l'effecteur.

Toujours dans le cadre de l'auto-étalonnage d'une plate-forme de Gough, Zhuang et Liu montrent que le processus d'étalonnage diminue de 6 le nombre de paramètres à identifier [Zhu96a]. En effet, dans ce type d'étalonnage, il n'est pas nécessaire de repérer l'instrument de mesure dans le repère du manipulateur. L'auto-étalonnage ne permet donc pas de replacer le manipulateur par rapport à une référence fixe [Dan03], ce qui est nécessaire dans beaucoup d'applications telles que les machines-outils ou les chaînes d'assemblage.

2.2.1.3 Étalonnage contraint

Définition 4 *Contraindre physiquement le mécanisme est un moyen de rendre les informations fournies par les capteurs proprioceptifs redondantes. Lorsque le mouvement du manipulateur est contraint par un moyen mécanique, on parle alors d'étalonnage contraint.*

L'étalonnage contraint présente l'avantage d'être économique puisqu'aucun capteur supplémentaire n'est nécessaire, les mesures s'effectuant grâce aux capteurs proprioceptifs existants. Ikits et Hollerbach montrent l'efficacité de cette méthode lors de la simulation de l'étalonnage d'un mécanisme parallèle plan dont le mouvement de l'organe effecteur est contraint par un plan [Iki97]. Khalil et Besnard proposent en 1999 dans [Kha99] une méthode pour étalonner sans mesure redondante une plate-forme de Gough-Stewart. Les auteurs proposent de bloquer l'orientation d'une jambe du manipulateur, ou tout du moins certaines liaisons passives, afin d'obtenir un modèle comportant plus d'équations que d'inconnues et ainsi pouvoir étalonner le manipulateur. De la même façon, Daney fixe la longueur et l'orientation de deux jambes d'une plateforme de Gough dans [Dan99] afin de contraindre le mouvement de l'effecteur à un seul degré de liberté et d'exploiter les informations des capteurs proprioceptifs des 4 autres jambes.

Cependant, les performances du manipulateur dépendent logiquement de la précision des capteurs proprioceptifs. De plus, l'espace de travail de mesure est réduit puisque le mécanisme est contraint. D'autre part, contraindre le mécanisme peut modifier son comportement : par exemple l'effet du jeu présent dans certaines articulations du mécanisme sur le comportement du robot peut ne pas être observé si une ou plusieurs articulations sont bloquées. Ainsi, l'étalonnage contraint ne permet pas de garantir les performances du manipulateur sur l'intégralité de sa zone de fonctionnement [Mer06b]. Enfin, l'effet couplé des paramètres peut ne pas être pris en compte puisqu'ils ne peuvent pas tous être identifiés en même temps [Mas93, Bes01].

Un autre inconvénient est que l'étalonnage contraint, comme externe d'ailleurs, nécessite un appareillage spécifique. En conséquence, les modifications du comportement du robot, dues par exemple à un changement des conditions extérieures ou à un choc, imposent de recourir à la mise en place d'une nouvelle campagne d'étalonnage. À l'inverse, l'auto-étalonnage peut permettre de prendre en compte ces modifications sans affecter le fonctionnement du robot.

2.2.2 Problématiques liées à l'étalonnage

Quelle que soit la méthode d'étalonnage utilisée, le processus peut être décrit en quatre points successifs : définir un modèle du manipulateur, réaliser des mesures, identifier les paramètres du modèle, et simplifier, au besoin, ce modèle étalonné pour l'intégrer dans l'algorithme de commande [Moo91]. A ces quatre étapes s'ajoute une étape de vérification lors de laquelle de nouvelles mesures sont réalisées afin de garantir le succès de l'étalonnage². Si cette étape de vérification montre que le manipulateur ne permet pas d'obtenir les performances attendues, il est alors possible de revenir sur chacune des étapes d'étalonnage, comme le montre la figure 2.1.

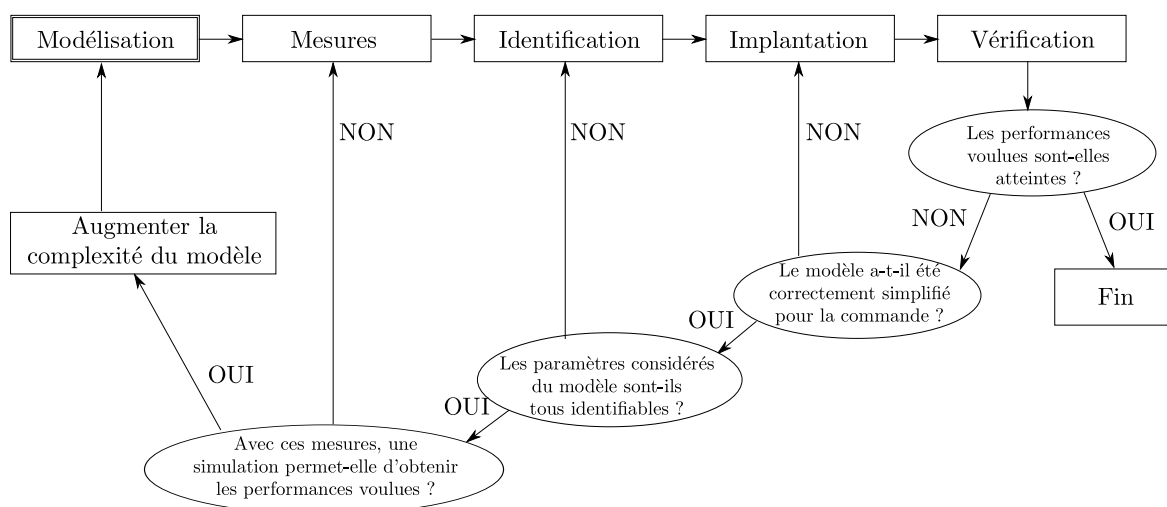


FIGURE 2.1 – Processus de cheminement possible pour un processus d'étalonnage

Cependant, même si la figure 2.1 donne une idée simple du processus de questionnement lors de l'étalonnage, il est préférable d'étudier ces problématiques en amont de l'étalonnage pour garantir un processus d'étalonnage rapide et de qualité.

Afin de donner des pistes de réflexion sur les différentes problématiques liées à l'étalonnage, les qualités nécessaires de chaque étape sont détaillées. Celles-ci permettront de répondre tout du moins partiellement aux questions suivantes :

- Quel niveau de complexité de modélisation faut-il choisir au regard des performances voulues ?
- Quelles mesures réaliser, ou quelles contraintes considérer ? Combien de configurations de mesures sont-elles nécessaires et comment faut-il les choisir ?
- Les paramètres du modèle sont-ils tous identifiables ? Sinon, quel jeu de paramètres considérer pour garantir la meilleure qualité d'étalonnage possible en fonction des mesures ?
- Comment adapter le modèle identifié lors de l'étalonnage pour l'utiliser dans la boucle de commande ?

2. L'étape de vérification peut aussi être placée avant l'étape d'implantation. Pour cela, il faut diviser les mesures en deux groupes : le premier servant à l'identification et le second à la validation.

- Comment choisir les poses de vérification pour garantir les performances du manipulateur sur tout son espace de travail ?

2.3 Modélisation

La modélisation est la première étape nécessaire à l'étalonnage. La qualité de l'étalonnage dépend grandement du modèle choisi pour décrire le comportement du robot. Par exemple, une précision importante ne pourra jamais être atteinte avec un modèle ne considérant pas certaines sources d'erreurs prépondérantes, et inversement, un modèle trop complexe risque d'être difficile à identifier puisque faisant intervenir un grand nombre de paramètres. Il faut aussi garder à l'esprit que le modèle doit répondre aux performances attendues du manipulateur pour une application donnée : par exemple pour un même manipulateur, le modèle choisi peut être différent selon qu'il doit déplacer de lourdes charges lentement ou de petits objets rapidement.

2.3.1 Types d'erreurs pris en compte

Deux types d'erreurs peuvent affecter la précision d'un manipulateur : les erreurs systématiques, provenant de la méconnaissance des données géométriques ou de l'interaction avec le milieu environnant (gravité, contact avec d'autres solides, *etc*), et les erreurs aléatoires, principalement générées par les appareils de mesures et le jeu dans les articulations [Faz06]. Le processus d'étalonnage agit uniquement sur les erreurs systématiques, les erreurs aléatoires pouvant quant à elles être prises en compte sous forme de distribution de probabilité [Wam95]. Cependant, l'efficacité de la prise en compte des erreurs aléatoires dans les équations d'étalonnage n'a pas été prouvée, et peut même détériorer les résultats d'étalonnage [Dan06].

Parmi les erreurs systématiques, deux cas peuvent être distingués : les erreurs géométriques (typiquement dues aux tolérances de fabrication) et les erreurs non-géométriques (telles que la prise en compte de la gravité, de la flexion des pièces, *etc*) [Dan00]. Les erreurs géométriques peuvent être prises en compte grâce à des modèles géométriques complets, en faisant appel à la modélisation de Denavit-Hartenberg modifiée par exemple [Kha86]. Cependant, le nombre de paramètres peut alors devenir important (138 pour une plate-forme de Gough [Vis96]). De plus, prendre en compte les erreurs non-géométriques nécessite d'augmenter la complexité du modèle en considérant des paramètres non-géométriques, tels que la température ou les coefficients de raideur.

Afin de réduire le nombre de paramètres à considérer lors de l'étalonnage, des études ont été menées pour identifier les sources d'erreurs prépondérantes. Cependant, ces études concluent que l'influence des erreurs systématiques sur la précision du robot dépendent principalement du domaine d'application et des conditions environnementales [Moo89, Wan93, Mas97]. Par exemple, dans le cas du robot Delta (voir la figure 2.2) en régime permanent, une différence de température entre l'air ambiant et le robot est plus pénalisante sur la précision que l'échauffement de certaines de ses parties mécaniques, pourtant du même ordre de grandeur [Nia04]. La température ambiante est donc le principal facteur d'erreur dans ce cas

et une fois réglée, tous les autres facteurs d'erreur considérés sont alors du même ordre de grandeur.

Ainsi, aucun *a priori* ne peut être donné sur l'influence de telle ou telle source d'erreur sur la précision d'un manipulateur. Pour l'étalonnage d'un robot spécifique, certaines hypothèses doivent donc être avancées au regard des précédentes études effectuées pour le type d'application visée et/ou pour le type d'architecture considéré.



FIGURE 2.2 – Exemple de robot Delta [Cla91]

2.3.2 Propriétés requises pour un modèle

Pour les modèles géométriques, il est nécessaire que le modèle développé ait certaines propriétés afin de garantir la qualité de l'étalonnage. Everett [Eve87] explique que le modèle doit être :

Complet : Le modèle doit admettre un nombre suffisant de paramètres indépendants pour décrire n'importe quelle pose ou variation géométrique du robot.

Équivalent : Il faut avoir la possibilité d'établir un lien entre deux modèles acceptables.

Proportionnel : De petits changements dans la géométrie du robot doivent se traduire par de petits changements sur les paramètres.

Cependant, dans le cas d'erreurs non-géométriques, les notions de complet et d'équivalent ne peuvent pas être appliquées puisque la modélisation peut prendre plusieurs formes selon les théories utilisées. Par exemple le comportement d'une articulation flexible peut être modélisé en utilisant la théorie des poutres ou les matrices de raideur. Ces deux grands domaines n'ont pas les mêmes hypothèses de fonctionnement ni les mêmes domaines d'application. Ainsi, les modèles développés ne pourront être complets ou équivalents.

2.3.3 Différents modèles utilisés

Il existe deux grandes façons de définir un modèle [Vis96] :

Modèle paramétrique : ce modèle repose sur une représentation de la géométrie réelle du manipulateur en ce qui concerne les erreurs géométriques et sur des modèles théoriques pour les erreurs non-géométriques.

Modèle non-paramétrique : ce modèle repose sur les informations des capteurs et les paramètres du modèle n'ont pas de signification physique. Nous retrouvons dans cette catégorie le réseau de neurones [Faz06] ou l'ajustement de modèle [Moo91] par exemple.

Les modèles paramétriques sont à privilégier car les valeurs des paramètres du modèle obtenues après étalonnage peuvent être reliées à une source d'erreur ayant une réalité physique. Il est alors possible, lors d'une première étape de vérification, de juger de la vraisemblance des résultats d'étalonnage. La mise en équation d'un modèle physique dépend cependant de la paramétrisation utilisée. L'une des paramétrisations géométriques les plus utilisées est celle de Denavit-Hartenberg [Den55]. Cependant, Everett montre que cette paramétrisation n'est pas proportionnelle [Eve87], et donc peu souhaitable pour l'étalonnage. Khalil et Kleinfinger proposent une version modifiée de la paramétrisation de Denavit-Hartenberg afin de corriger ce défaut [Kha86].

A l'inverse, les modèles non-paramétriques peuvent être utilisés pour approcher une source d'erreur dont les modèles paramétriques sont trop difficiles à mettre en place, soit parce que le phénomène est mal connu, soit parce qu'ils feraient intervenir un très grand nombre de paramètres, nécessitant une instrumentation supplémentaire du mécanisme pour l'étalonnage. L'analyse des valeurs des paramètres obtenues après étalonnage est cependant plus complexe dans ce cas, puisque rattachées à aucune réalité physique. De plus, il devient plus difficile de valider les performances du manipulateur sur tout l'espace de travail étant donné que la nature des erreurs prises en compte lors de l'étalonnage avec les modèles non-paramétriques n'est pas - ou peu - connue : par exemple, un modèle linéaire peut donner de très bons résultats sur les poses mesurées, mais ne pas refléter le bon degré de complexité de la ou des sources d'erreur modélisées et donc détériorer la précision du manipulateur sur d'autres zones de l'espace de travail.

2.4 Mesures

Une fois le modèle du manipulateur développé, il faut alors effectuer les mesures redondantes afin de pouvoir estimer les paramètres du modèle. Le choix du type et du nombre de mesures ainsi que des configurations du robot pour lesquelles les mesures seront effectuées dépend du modèle considéré, et donc des phénomènes physiques pris en compte ainsi que des hypothèses effectuées. Étant donné que l'étape de mesure nécessite une instrumentation supplémentaire et parfois une interruption du fonctionnement normal du manipulateur, c'est l'étape la plus coûteuse du processus d'étalonnage. De plus, la qualité des résultats d'étalonnage dépend de la qualité des mesures. Ainsi, il est nécessaire que le modèle développé ait été convenablement étudié afin de prendre en compte les sources principales d'erreur, et également d'avoir une réflexion préalable sur le choix des informations redondantes à mesurer, et pour quelles configurations du manipulateur.

2.4.1 Quelles informations redondantes choisir ?

Le choix du type et de la qualité des mesures est contraint par les performances recherchées et donc par le domaine d'application visé. Les contraintes imposées doivent être prises en compte dès que possible pour le choix des informations redondantes à mesurer. Elles peuvent bien souvent se résumer en deux questions :

- Quelle sera la fréquence de l'étalonnage ?
- Quel sont les performances recherchées ?

La réponse à la première question décidera du type d'étalonnage à mettre en place. Par exemple, un manipulateur utilisé dans des conditions qui évoluent rapidement, ou dans un environnement difficile d'accès nécessitera bien souvent un auto-étalonnage. A l'inverse, pour un robot qui effectuera une tâche répétitive dans les mêmes conditions, telles que des opérations industrielles de *pick and place*, un étalonnage externe ou contraint pourra être envisagé. Le choix du type d'étalonnage permet donc un premier choix dans le type de mesure à effectuer : des capteurs inhérents au manipulateur et ne gênant pas son fonctionnement sont nécessaires pour l'auto-étalonnage, tandis qu'un appareil de mesure externe peut être envisagé dans les autres cas.

Les performances recherchées définiront ensuite la nature, la qualité et le nombre de mesures requis. En ce qui concerne la nature des mesures, il est préférable que celle-ci corresponde au critère de performance voulu à l'issue du processus d'étalonnage. Par exemple, si l'objectif est d'améliorer la précision statique en position et en orientation, il est souhaitable d'acquérir directement des mesures sur le positionnement de la plate-forme mobile par rapport à la base. Ainsi, les mesures peuvent être utilement réutilisées à des fins de vérification, ce qui limite les coûts de mesure et d'immobilisation du robot. Cependant, il est tout à fait possible de garantir certaines performances en ne les mesurant pas directement. Par exemple, Daney améliore la précision statique d'une structure Hexapode dans [Dan03] à partir des informations redondantes fournies par les joints universels.

En ce qui concerne la qualité des mesures à réaliser, une règle empirique montre que les mesures doivent être au moins 10 fois plus précises que la précision recherchée [Pat00, Lub11]. Nous verrons cependant dans le prochain chapitre que la précision nécessaire des mesures peut être déduite directement des spécifications voulues, en fonction du modèle et du type de mesures. Si la précision nécessaire des mesures est trop importante, ou que le dispositif expérimental ne permet pas l'utilisation d'un moyen de mesure aussi précis, il est aussi possible de répéter les mesures afin d'en diminuer le bruit [Jou13].

Enfin, l'augmentation du nombre de mesures améliore la qualité de l'étalonnage, bien que d'un facteur limité [Bes99]. En effet, d'une part le bruit de mesure ne peut pas être totalement éliminé, même en répétant les mesures, et d'autre part l'effet des sources d'erreurs non modélisées ne dépend pas du nombre de configurations de mesure utilisées pour réaliser l'étalonnage. Pour un même nombre de mesures, il est cependant possible d'effectuer un choix judicieux des configurations de mesure afin d'améliorer la qualité d'étalonnage par rapport à des configurations de mesure choisies aléatoirement. Dans tous les cas, une simulation du processus d'étalonnage est nécessaire afin de valider la nature, la qualité et le nombre de mesures qui permettent d'obtenir les performances voulues.

2.4.2 Choix des configurations de mesure

Réaliser un étalonnage à l'aide de configurations de mesure non-optimisées nécessite un très grand nombre de mesures pour obtenir les performances souhaitées. Des études ont été menées pour essayer de diminuer le nombre de mesures nécessaires tout en garantissant la qualité de l'étalonnage [Ren03b, Dan05]. Ces études montrent qu'un choix judicieux des configurations de mesure permet de diminuer l'influence du bruit de mesure sur la qualité de l'étalonnage. Ce choix se base sur des indices d'observabilité rapportant l'identifiabilité des paramètres du modèle. Cependant, ce processus d'optimisation est souvent non-linéaire, et plusieurs algorithmes de choix ont été développés.

2.4.2.1 Exemple introductif

Pour mieux comprendre l'influence des configurations de mesures sur la qualité d'identification des paramètres, un exemple simple est considéré. Une barre OA de longueur l peut pivoter autour du point O comme présentée en figure 2.3. Afin d'améliorer la précision de positionnement, nous cherchons à estimer au mieux la position (x_O, y_O) du pivot dans le repère de mesure \mathcal{R}_m , en considérant des mesures de la position du point A . La longueur l de la barre a précédemment été mesurée avec une précision de mesure Δm , et nous supposons que la position du point A est connue parfaitement pour chaque configuration de mesure, c'est-à-dire que l'erreur de mesure du point A est négligeable par rapport à la précision de mesure Δm de la barre de longueur l .

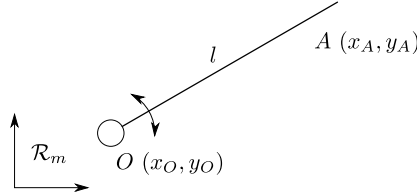


FIGURE 2.3 – Exemple introductif considéré

Deux cas sont présentés en figure 2.4, chacun présentant deux configurations de mesures pour réaliser l'étalonnage. Les deux configurations de mesure font un angle de 90° entre elles pour le Cas 1, et de $\alpha = 30^\circ$ pour le Cas 2. La longueur de la barre l ayant été mesurée avec une précision Δm , la position du point O à estimer est donc comprise dans un anneau de centre A , et de rayons intérieur et extérieur $r = l \pm \Delta m$. L'intersection de ces deux anneaux définit une zone dans laquelle le point O peut se trouver, en considérant le bruit de mesure. Cette zone est grisée dans la figure 2.4.

Pour les deux cas, la zone grisée n'a ni la même forme, ni la même surface. Par exemple, cette zone est plus petite pour le Cas 1 : avec les configurations de mesure utilisées et en considérant le bruit de mesure, la probabilité que la position du point O identifiée soit proche de la position réelle est donc plus importante que pour le Cas 2. De plus, l'erreur maximale possible sur l'estimation de la position du point O est plus importante dans le Cas 2 que dans le Cas 1. Suivant les configurations utilisées, le bruit de mesure n'aura donc pas la même influence sur l'identification des paramètres. Le fait qu'un paramètre soit « facilement » identifiable ou

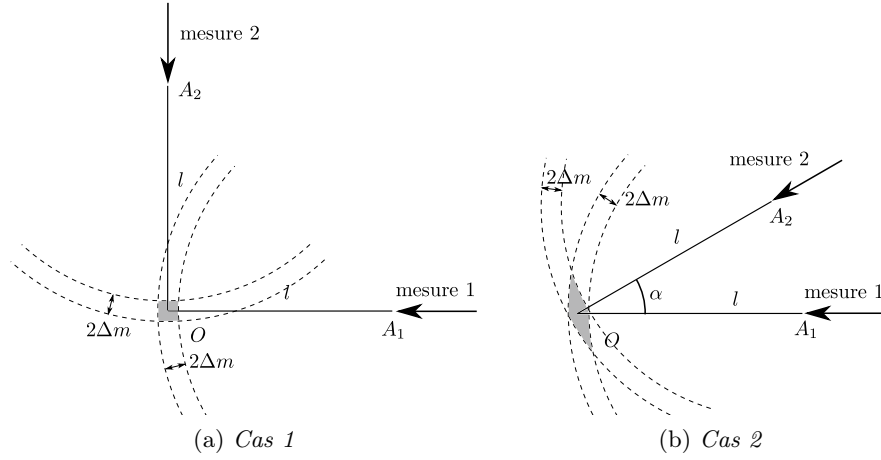


FIGURE 2.4 – Les deux cas considérés pour l'étalonnage

non peut être pris en compte grâce à des indices d'observabilité. Ces indices traduisent la taille, la forme ou encore l'isotropie de la zone d'identification par une valeur chiffrée, permettant ainsi une optimisation. La zone d'identification est communément appelée hyperellipsoïde, ce qui sous-entend un effet couplé des erreurs de mesure [Mer05a]. Dans la suite de ce document, nous préférons le terme polytope d'identification.

2.4.2.2 Indices d'observabilité

Le bruit de mesure n'a pas la même influence sur la qualité d'identification des paramètres du modèle pour toutes les configurations du manipulateur, comme le montre l'exemple introductif ci-dessus. Afin de rendre compte de ce phénomène, et ainsi de pouvoir améliorer la qualité de l'étalonnage, les auteurs ont proposé des indices d'observabilité. Afin d'explicitier ces indices, il est nécessaire de dériver les équations d'étalonnage.

Les équations d'étalonnage sont obtenues pour chaque configuration de mesure p en considérant une fonction \mathbf{g}_p dite d'identification. Pour chaque pose p , cette fonction relie les mesures \mathbf{m}_p , les variables articulaires $\boldsymbol{\rho}_p$ et les paramètres du modèle $\boldsymbol{\xi}$. L'objectif de l'étalonnage est d'ajuster les paramètres du modèle $\boldsymbol{\xi}$ afin de minimiser le ou les résidus ε_p de la fonction d'identification sur l'ensemble des configurations de mesure $p = 1..N_p$ (la façon de poser le problème de minimisation et de le résoudre sera explicité en section 2.5) :

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi}) = \varepsilon_p \quad (2.1)$$

La jacobienne d'identification \mathbf{G}_ξ^p de la pose p peut alors être obtenue en différenciant (2.1) par rapport à $\boldsymbol{\xi}$. L'assemblage de ces matrices pour l'ensemble des configurations de mesure $p = 1..N_p$ donne la jacobienne d'identification totale \mathbf{G}_ξ :

$$\mathbf{G}_\xi = [\mathbf{G}_\xi^{1T} \dots \mathbf{G}_\xi^{pT} \dots \mathbf{G}_\xi^{N_p T}]^T \quad \text{avec} \quad \mathbf{G}_\xi^p = \frac{\partial \mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (2.2)$$

En considérant les caractéristiques de la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ , des indices d'observabilité ont été développés [Sun08]. Ces indices permettent d'apprécier l'identifiabilité des paramètres à travers des valeurs chiffrées :

- O_1 : lié au produit des n_ξ valeurs singulières σ_i^G de \mathbf{G}_ξ telle que $O_1 = \frac{n_\xi \sqrt{\sigma_1^G \cdot \sigma_2^G \dots \sigma_{n_\xi}^G}}{\sqrt{m \cdot N_p}}$ où $m \cdot N_p$ est le nombre total de mesures. Cet indice traduit le volume du polytope (ou zone) d'identification.
- O_2 : l'inverse du conditionnement de \mathbf{G}_ξ . Cet indice traduit l'isotropie, à savoir la proximité entre le polytope et un hypercube, et donc la forme du polytope d'identification.
- O_3 : la plus petite valeur singulière de \mathbf{G}_ξ . Cet indice traduit la direction critique du polytope d'identification.
- O_4 : le rapport de la plus petite valeur singulière au carré et de la plus grande. Cet indice traduit l'amplification maximale possible du bruit de mesure et des sources d'erreur non-modélisées sur l'identification des paramètres [Nah96].

Ces indices font pour la plupart référence aux concepts de D- ou E-optimalité couramment utilisés dans le domaine des statistiques. Une comparaison de ces indices d'observabilité est réalisée dans [Sun08]. Cependant, ces indices dépendent des valeurs singulières de la jacobienne d'identification \mathbf{G}_ξ . Afin de pouvoir comparer les valeurs singulières entre elles, il est nécessaire de normaliser la matrice d'identification pour rendre comparable dans la mesure du possible des erreurs de position et d'orientation par exemple : une façon de normaliser \mathbf{G}_ξ sera proposée dans le chapitre 3.

2.4.2.3 Algorithme de choix des configurations de mesure

Après avoir choisi l'indice d'observabilité le mieux adapté au processus d'étalonnage considéré, les configurations de mesure peuvent être choisies dans le but d'améliorer la qualité de l'étalonnage par rapport au même nombre de configurations de mesure réparties aléatoirement dans l'espace de travail. Le choix de ces poses nécessite l'utilisation d'une méthode d'optimisation afin de rendre maximal (ou minimal) l'indice d'observabilité choisi. Cependant, le problème est souvent non-linéaire et fait intervenir un grand nombre de variables. De plus, l'optimisation doit s'effectuer sous contrainte pour que les configurations de mesure soient situées dans l'espace de travail du manipulateur.

Ainsi, certains auteurs ont proposé des méthodes méta-heuristiques afin de mener à bien l'optimisation : par exemple, Zhuang *et al.* proposent l'utilisation d'un algorithme génétique [Zhu96b] ou encore d'une méthode de recuit simulé [Zhu94]. Cependant, ces méthodes n'offrent aucune garantie sur l'obtention d'un minimum global. C'est pourquoi d'autres méthodes de minimisation ont aussi été considérées. Par exemple, Daney *et al.* utilisent l'algorithme IOOPS qui recherche les meilleures configurations de mesure une par une grâce à un algorithme de descente du gradient [Dan05]. Afin de s'assujettir des minimums locaux, ils couplent cet algorithme avec une méthode heuristique, par exemple pour le choix des configurations initiales. Enfin, afin de réduire l'espace de recherche, il est aussi possible de choisir les meilleures configurations de mesure parmi un jeu de configurations défini, par exemple à l'issue d'une discrétisation de l'espace de travail [Ver05, Jou13]. Cette dernière méthode ne garantit cependant pas l'obtention des configurations de mesure optimales dans l'espace de travail du

robot. Une comparaison de certaines de ces méthodes sera effectuée dans le chapitre 3.

2.5 Identification

Grâce aux mesures réalisées, il est alors possible d'identifier tout ou partie des paramètres du modèle. Le processus d'identification consiste à ajuster les paramètres du modèle ξ afin de minimiser les résidus ε_p de la fonction d'identification \mathbf{g}_p sur l'ensemble des configurations de mesure $p = 1..N_p$. Le nombre de configurations de mesure utilisées pour l'étalonnage est quasiment toujours supérieur au nombre minimal, ceci dans le but encore une fois de minimiser l'influence du bruit de mesure sur les résultats d'étalonnage. Le système d'équations à résoudre est alors sur-contraint et n'admet génériquement pas de solution.

Une façon d'ajuster un modèle mathématique par rapport à des observations expérimentales, comportant des erreurs, est la méthode des moindres carrés. Même si d'autres méthodes existent (par exemple l'analyse par intervalles qui a été appliquée à la problématique de l'étalonnage en considérant les incertitudes de mesure [Dan06, AdS13]), la méthode des moindres carrés est actuellement la méthode la plus utilisée pour l'étalonnage. La fonction objectif h à minimiser peut donc s'écrire :

$$h = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{g}_p^T \mathbf{g}_p = \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{g} \quad \text{avec} \quad \mathbf{g} = [\mathbf{g}_1^T \dots \mathbf{g}_p^T \dots \mathbf{g}_{N_p}^T]^T \quad (2.3)$$

Cependant, cette méthode nécessite une certaine homogénéité des équations : le choix de la fonction d'identification peut amener à des valeurs différentes des paramètres identifiés. Par exemple, si le vecteur des résidus ε_p mélange des données de position et d'orientation, la façon de définir l'orientation peut amener à donner plus d'influence aux paramètres d'orientation par rapport à ceux de précision sur la fonction objectif h à minimiser : une autre paramétrisation pourrait alors donner des résultats différents d'étalonnage. De plus, les fonctions sont souvent non-linéaires et un choix judicieux de l'algorithme de minimisation doit être effectué.

2.5.1 Comment poser le problème d'identification ?

Pour l'étalonnage géométrique, il existe trois grandes façons de définir la fonction d'identification : nous parlerons alors d'étalonnage *direct*, *inverse* ou *implicite*.

2.5.1.1 Étalonnage direct

L'étalonnage direct consiste à considérer comme fonction d'identification l'écart entre la pose théorique \mathbf{x}_{th} , issue du modèle géométrique direct à partir des informations des capteurs proprioceptifs ρ_p et des paramètres géométriques ξ , et la pose calculée à partir des mesures extéroceptives additionnelles \mathbf{x}_m (notons que les mesures additionnelles peuvent ne pas donner directement des informations sur la pose du manipulateur, mais que ces informations peuvent être déduites par l'intermédiaire d'un modèle prenant en compte les mesures additionnelles) :

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p, \rho_p, \xi) = \mathbf{x}_{th}(\rho_p, \xi) - \mathbf{x}_m(\mathbf{m}_p, \rho_p, \xi) \quad (2.4)$$

La dimension de \mathbf{g}_p dépend donc du nombre de degrés de liberté du manipulateur. Ainsi, cette méthode est difficile à mettre en place lorsque la pose du manipulateur fait intervenir des paramètres de position et de rotation, difficilement comparables. En effet, la façon de paramétrer la rotation aura une influence sur l'identification des paramètres, et modifiera les résultats d'étalonnage en terme de précision finale en orientation ou en position. De plus, dans le cas de robot parallèle, le modèle géométrique direct n'admet le plus souvent pas de solution unique [Mer06b]. Certaines méthodes, par exemple l'ajout de capteurs [Mer93a, Bon00], permettent de diminuer la complexité de la résolution du modèle géométrique direct, mais leur nombre et leur position doivent être judicieusement étudiés afin de garantir l'unicité de la solution [Mer93a]. Afin de pallier ces difficultés, il est possible de considérer le modèle géométrique inverse du manipulateur : c'est l'étalonnage inverse.

2.5.1.2 Étalonnage inverse

Par analogie avec l'étalonnage direct, l'étalonnage inverse utilise le modèle géométrique inverse et considère l'écart entre les positions des actionneurs $\boldsymbol{\rho}_m$ calculées à partir des mesures extéroceptives additionnelles \mathbf{m}_p et celles issues des données des capteurs proprioceptifs $\boldsymbol{\rho}_p$:

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\rho}_p - \boldsymbol{\rho}_m(\mathbf{m}_p, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.5)$$

Contrairement à l'étalonnage direct, cette méthode permet de s'affranchir de l'hétérogénéité des mesures de position et d'orientation, dans la plupart des cas. En effet, cette mixité peut tout de même subsister si les capteurs des actionneurs ou les mesures additionnelles ne sont pas de nature identique. Un autre avantage de cette méthode réside dans la façon d'écrire les équations d'étalonnage, c'est-à-dire la fonction d'identification. En effet, chaque chaîne cinématique reliant la base à la plate-forme mobile peut être considérée indépendamment dans les équations. Ainsi, les paramètres géométriques de chaque chaîne peuvent être identifiés indépendamment des autres chaînes, minimisant ainsi la sensibilité de l'étalonnage aux erreurs de mesures : une erreur de mesure ayant une grande influence pour une chaîne cinématique n'aura pas - ou peu - d'influence sur une autre [Dan00]. De meilleurs résultats sont ainsi obtenus qu'en réalisant un étalonnage direct [Mer06b]. De plus, le processus d'étalonnage peut être effectué indépendamment pour chaque chaîne cinématique, diminuant ainsi la dimension du problème et donc le temps de calcul.

2.5.1.3 Étalonnage implicite

L'étalonnage implicite a été introduit par Wampler *et al.* en 1995 [Wam95]. Il est intimement lié à l'étalonnage inverse puisque l'idée de base est de considérer indépendamment chaque équation de fermeture de boucle cinématique, et donc chaque chaîne cinématique. La principale différence réside dans le fait que la fonction d'identification utilise les relations implicites de fermeture de chaînes cinématiques, relations reliant les variables articulaires et les mesures aux paramètres géométriques.

Par exemple, dans le cas d'un manipulateur de type poignet actif [Mer91b] présenté en figure 2.5a et en supposant que l'intégralité de la pose du manipulateur a été mesurée ($\mathbf{m} = [\mathbf{p}, \mathbf{R}]$), la fonction d'identification implicite $\mathbf{g}_{i,p}$ de la jambe i pour la pose p peut

s'écrire :

$$\mathbf{g}_{i,p}(\mathbf{m}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi}) = l_i - \|\mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i - \rho_i \mathbf{u}_i\| \quad (2.6)$$

Cette fonction est directement issue des équations de fermeture de boucle géométrique. Dans certains cas, par exemple pour la plate-forme de Gough de la figure 2.5b, ces équations de fermeture géométrique sont les équations du modèle géométrique inverse [Dan00]. Ainsi, pour certains manipulateurs, il n'y a pas de distinction entre l'étalonnage inverse et implicite.

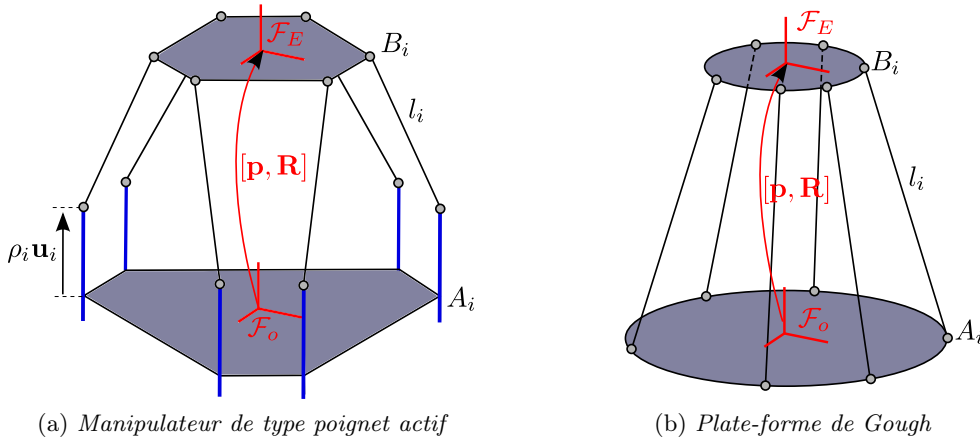


FIGURE 2.5 – Exemple de deux architectures robotiques parallèles connues

L'étalonnage implicite reprend donc les avantages de l'étalonnage inverse. Dans la majorité des cas, la simplicité des équations considérées permet l'obtention d'une forme analytique de la jacobienne d'identification \mathbf{G}_ξ [Vis96]. De plus, considérer les équations de fermeture géométrique permet une écriture unifiée des équations d'étalonnage quelles que soient les mesures réalisées (étalonnage externe, auto-étalonnage ou étalonnage contraint). De par sa simplicité et ses avantages, c'est actuellement l'étalonnage le plus couramment utilisé dans le cas de robots parallèles.

2.5.2 Comment résoudre les équations d'identification ?

Le système d'équations à résoudre est un système sur-contraint qui n'admet génériquement pas de solution. Une façon d'approcher une solution est d'utiliser la méthode des moindres carrés. La fonction objectif h à minimiser faisant intervenir les fonctions d'identification \mathbf{g}_p est rappelée en (2.7) :

$$h = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{g}_p^T \mathbf{g}_p = \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{g} \quad \text{avec} \quad \mathbf{g} = [\mathbf{g}_1^T \dots \mathbf{g}_p^T \dots \mathbf{g}_{N_p}^T]^T \quad (2.7)$$

Les équations d'identification sont souvent non-linéaires et il faut donc avoir recours à des méthodes itératives pour estimer une solution aux moindres carrés du système sur-contraint. Les méthodes itératives considèrent l'approximation quadratique de la fonction objectif $h(\boldsymbol{\xi})$

à minimiser, au voisinage des paramètres du modèle ξ_i de la $i^{\text{ème}}$ itération :

$$h(\xi) \approx h(\xi_i) + \nabla_{\xi} h(\xi_i)^T (\xi - \xi_i) + \frac{1}{2} (\xi - \xi_i)^T \nabla_{\xi}^2 h(\xi_i) (\xi - \xi_i) \quad (2.8)$$

avec $\nabla_{\xi} h(\xi)$ et $\nabla_{\xi}^2 h(\xi)$ les dérivées premières et secondes de $h(\xi)$, qui peuvent s'écrire exactement en considérant (2.9), \mathbf{H}_{ξ}^p étant la matrice Hessienne de la fonction d'identification \mathbf{g}_p de la pose p :

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi} h(\xi) &= \mathbf{G}_{\xi}^T \mathbf{g}(\xi) \\ \nabla_{\xi}^2 h(\xi) &= \mathbf{G}_{\xi}^T \mathbf{G}_{\xi} + \mathbf{S} \quad \text{avec} \quad \mathbf{S} = \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{g}_p(\xi) \mathbf{H}_{\xi}^p \end{aligned} \quad (2.9)$$

Une condition nécessaire pour déterminer les ξ qui minimisent (2.8) est que la dérivée première de l'approximation quadratique de $h(\xi)$ s'annule en ξ . Ce qui peut s'écrire :

$$\nabla_{\xi} h(\xi_i) + \nabla_{\xi}^2 h(\xi_i) (\xi - \xi_i) = 0 \quad (2.10)$$

En réécrivant (2.10) avec les égalités de (2.9), et en notant $\delta\xi = \xi - \xi_i$ la correction à appliquer aux paramètres du modèle, on obtient :

$$\mathbf{G}_{\xi}^T \mathbf{g}(\xi_i) + (\mathbf{G}_{\xi}^T \mathbf{G}_{\xi} + \mathbf{S}) \delta\xi = 0 \quad (2.11)$$

Ainsi, la valeur du vecteur des paramètres peut être calculée pour l'itération $i + 1$, telle que :

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \delta\xi \quad (2.12)$$

Cependant, il est souvent difficile, voire impossible d'évaluer la matrice \mathbf{S} [Gil06] pour le calcul de la dérivée seconde de $h(\xi)$. Nous avons donc recours à des méthodes itératives permettant d'estimer cette matrice : les plus utilisées sont la méthode de Gauss-Newton et celle de Levenberg-Marquardt.

2.5.2.1 Méthode de Gauss-Newton

L'idée de cette méthode est de ne pas estimer la matrice \mathbf{S} . En effet, comme le montre (2.9), la matrice \mathbf{S} fait intervenir les résidus de la fonction à minimiser $\mathbf{g}_p(\xi)$. Au voisinage de la solution, ces résidus sont petits et peuvent être négligés devant les termes de $\mathbf{G}_{\xi}^T \mathbf{G}_{\xi}$. Les équations normales deviennent alors :

$$\mathbf{G}_{\xi}^T \mathbf{g}(\xi_i) + \mathbf{G}_{\xi}^T \mathbf{G}_{\xi} \delta\xi = 0 \quad (2.13)$$

Cependant, cette approximation n'est valable qu'au voisinage de la solution. Si les estimées initiales sont peu ou mal connues, il est alors préférable d'utiliser une méthode de Levenberg-Marquardt.

2.5.2.2 Méthode de Levenberg-Marquardt

La méthode de Levenberg-Marquardt estime la diagonale de la matrice \mathbf{S} , telle que $\mathbf{S} \approx \mu \mathbf{I}$. Pour un μ petit, cette méthode s'approche de la méthode de Gauss-Newton tandis qu'une valeur de μ plus importante fait penser à une méthode du gradient. Ainsi, la valeur de μ est souvent diminuée au fur et à mesure des itérations [Mar63].

Il est à rappeler que ces méthodes itératives de type Newton ne convergent pas forcément vers la meilleure des solutions dans l'espace des solutions possibles. Pour certifier la convergence de ces algorithmes, il est possible de recourir à de l'analyse par intervalles, par exemple en utilisant la fonction TRYNEWTON de la librairie ALIAS [Mer]. Récemment, l'analyse par intervalles a aussi été directement utilisée pour définir des méthodes d'identification robuste pour l'étalonnage des robots parallèles à câbles [AdS13].

2.5.3 Identifiabilité des paramètres

Malgré la robustesse des méthodes présentées ci-dessus, il est parfois difficile voire impossible d'identifier tous les paramètres du modèle. En effet, certaines erreurs $\delta \xi$ peuvent ne pas être observables lors du processus d'identification. Ce phénomène peut intervenir par exemple lorsque les erreurs de mesure ont plus d'effet sur la fonction d'identification que la variation du paramètre à identifier. Ces problèmes d'identifiabilité dépendent de la jacobienne d'identification \mathbf{G}_ξ , et notamment de ses valeurs propres. Trois types de problème d'identifiabilité peuvent être identifiés [Hol08] : non-identifiabilité, faible identifiabilité et identifiabilité liée.

Non-identifiabilité : Un paramètre ξ est non-identifiable lorsqu'il n'apparaît pas dans la fonction d'identification \mathbf{g} , ou lorsque deux ou plusieurs erreurs $\delta \xi$ sont liées dans les équations normales (2.13) sous forme de combinaison linéaire. Ce phénomène se produit lorsque les mesures ne sont pas assez génériques ou lorsque les configurations de mesure ne font pas intervenir l'ensemble des paramètres du modèle. Étudier la non-identifiabilité des paramètres peut être menée théoriquement même s'il reste difficile de vérifier la dégénérescence d'une matrice de grande dimension : Besnard et Khalil [Bes01] proposent l'utilisation d'une décomposition QR de la matrice d'identification. Si le rang de \mathbf{G}_ξ est r , alors $n - r$ paramètres ne sont pas identifiables, avec n le nombre total de paramètres du modèle.

Faible identifiabilité : Si tous les termes d'une colonne de \mathbf{G}_ξ sont « proches » de zéro, alors le paramètre correspondant à cette colonne est faiblement identifiable : une importante variation de ce paramètre a peu d'influence sur la fonction d'identification par rapport au bruit de mesure. L'identification d'un tel paramètre conduit souvent à des variations importantes par rapport à sa valeur initiale et dégrade la robustesse de l'étalonnage [Hol08].

Identifiabilité liée : Lorsque deux ou plusieurs erreurs $\delta \xi$ apparaissent dans les équations normales (2.13) seulement sous forme de combinaison linéaire dont la variation est inférieure ou comparable à l'influence du bruit de mesure, on parle alors d'identifiabilité liée. Leurs colonnes respectives de \mathbf{G}_ξ sont reliées par une fonction linéaire et seule la

combinaison linéaire de ces paramètres peut être identifiée. Contrairement à la faible identifiabilité, il faut alors faire un choix sur le paramètre à identifier parmi ceux ayant une identifiabilité liée. Ce phénomène se produit pour des manipulateurs ayant de faibles espaces de travail ou lorsque les configurations de mesure ne sont pas assez génériques (pour des orientations constantes par exemple).

Même si la non-identifiabilité est facilement vérifiable puisqu'elle correspond à une chute de rang de la matrice d'identification, il n'en est pas de même pour les deux autres cas. En effet, les identifiabilités liée et faible correspondent à de « faibles » valeurs singulières de \mathbf{G}_ξ . Deux problèmes se posent alors : comment comparer les valeurs singulières entre elles puisque les paramètres à identifier n'ont pas tous la même unité par exemple, et comment définir le seuil en deçà duquel ces valeurs sont considérées « faibles » ?

Afin de pouvoir comparer les valeurs singulières, il est d'abord nécessaire de mettre à l'échelle la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ [Hol08], c'est-à-dire de redéfinir les paramètres et les mesures afin que leurs influences sur la fonction d'identification soient comparables. Ensuite, un seuil peut être défini à partir des indices d'observabilité en considérant les incertitudes de mesure. Nous proposons une façon de définir une matrice d'identification normalisée dans le chapitre 3. Nous détaillerons alors le choix du seuil à appliquer sur les valeurs singulières.

2.6 Vérification et Implantation

Les deux dernières étapes d'un processus d'étalonnage sont la vérification et l'implantation. Ces deux étapes sont interchangeables. En effet, il est possible d'effectuer une vérification soit directement après l'identification grâce à des mesures préalablement réalisées, soit en réalisant de nouvelles mesures après avoir implanté le modèle identifié dans la boucle de contrôle du manipulateur. Le choix de réaliser l'étape de vérification avant ou après implantation dépend grandement du processus d'étalonnage considéré. Par exemple, l'auto-étalonnage permet aisément d'effectuer les vérifications après implantation, ce qui sera plus difficile lors d'un étalonnage externe.

Dans les deux cas, le processus de vérification est équivalent : il consiste à considérer des mesures additionnelles qui seront comparées avec les prédictions du modèle identifié. La phase de vérification est essentielle pour le processus d'étalonnage puisqu'elle permet de valider ou d'infirmer le modèle identifié au regard des critères de performances à atteindre. En effet, pour les configurations de mesure utilisées pour l'identification, les performances du manipulateur ont été optimisées par le processus d'étalonnage. Ces configurations ne reflètent donc pas la qualité de la modélisation du manipulateur sur tout l'espace de travail. Afin de valider la qualité de l'étalonnage, il est donc nécessaire de considérer des configurations additionnelles de mesure, différentes de celles utilisées pour l'identification. Le choix de ces configurations reste encore un sujet peu traité, la majorité des auteurs considérant des poses réparties aléatoirement dans l'espace de travail pour valider l'étalonnage. À l'instar de l'optimisation des configurations de mesure pour l'étalonnage, nous discuterons d'un choix possible des poses de vérification dans le chapitre 6.

La phase d'implantation consiste quant à elle à simplifier le modèle afin qu'il ait les propriétés requises par l'algorithme de contrôle du manipulateur : temps de calcul, stabilité,

dynamique, *etc.* Cette phase est principalement utile lorsqu'un modèle complexe du manipulateur a été identifié : le comportement du manipulateur sur l'ensemble de son espace de travail est bien estimé mais le modèle doit être dégénéré pour pouvoir être utilisé dans la boucle de contrôle. Identifier un modèle plus complexe que nécessaire permet une meilleure gestion des erreurs du manipulateur sur son espace de travail mais est souvent difficile à réaliser.

2.7 Conclusion

L'étalonnage est un processus complexe, notamment dans le cas des robots parallèles. La qualité de l'étalonnage dépend de l'attention portée à chaque étape : modélisation, mesures, identification, vérification et implantation. Pour améliorer la qualité de l'étalonnage, il est possible d'intervenir sur chaque étape du processus. Cependant, le choix de l'étape à reconsidérer dépend des défauts observés à l'issue de l'étalonnage et certains phénomènes sont encore peu ou mal connus. Par exemple, la complexité du modèle est souvent augmentée jusqu'à ce que les valeurs des paramètres identifiés soient proches de leur valeurs nominales. Nous verrons dans le chapitre 5 que l'obtention d'une valeur éloignée de sa valeur nominale ne dégrade pas forcément la qualité des résultats de l'étalonnage au regard du critère de performance considéré. En effet, l'identification des paramètres du modèle peut dans certains cas prendre automatiquement en compte certaines sources d'erreurs non considérées lors de la modélisation, et permettre l'obtention des qualités requises pour le manipulateur. Il est cependant nécessaire de pouvoir expliquer ce phénomène, ce qui sera effectué dans le chapitre suivant.

De plus, l'étalonnage ne peut être réalisé que sous certaines hypothèses. Ces hypothèses impliquent des conditions nécessaires au bon déroulement de l'étalonnage et ne sont pour l'instant pas prises en compte lors d'un processus d'étalonnage. Ainsi, une étude préalable prenant en compte ces conditions est nécessaire en amont du processus d'étalonnage. Nous verrons dans le chapitre 3 que ces conditions permettent la définition de bornes ayant une réelle signification physique sur la précision nécessaire à obtenir sur les paramètres du modèle, ou encore sur le bruit de mesure maximal admissible pour les mesures. Ces conditions permettent alors l'obtention d'un critère d'arrêt pour l'algorithme d'identification des paramètres, et la possibilité de définir une matrice d'identification normalisée. Avec cette matrice, il est alors possible de détecter les problèmes d'identifiabilité des paramètres.

Étude préalable nécessaire à l'étalonnage

Résumé : L'étalonnage permet à un manipulateur d'atteindre certaines performances par une meilleure connaissance de son modèle. Afin de garantir les critères du cahier des charges relatifs au domaine d'utilisation du manipulateur, certaines conditions doivent être satisfaites par le processus d'étalonnage. Ces conditions permettent de définir la précision nécessaire à obtenir sur les paramètres du modèle ou encore la qualité des mesures à réaliser afin d'assurer la qualité de l'étalonnage. Ainsi, des moyens de mesure adaptés aux performances à atteindre peuvent être mis en place. De plus, ces conditions permettent de définir des critères chiffrés ayant une réelle signification physique, tels qu'un critère d'arrêt pour l'algorithme d'identification ou un seuil pour les valeurs singulières de la matrice d'identification afin de prévenir les problèmes d'identifiabilité des paramètres. Ces conditions peuvent être développées et prises en compte lors d'une étude préalable au processus d'étalonnage. Ainsi, la qualité de l'étalonnage ne dépend plus que de la faculté du modèle à prendre en compte les sources d'erreurs influençant le comportement du manipulateur. Nous étudierons donc finalement l'effet de la complexité du modèle sur les résultats d'étalonnage, et notamment sur la valeur des paramètres identifiés.

Sommaire

3.1	Introduction	32
3.2	Conditions nécessaires à l'étalonnage	32
3.2.1	Précision nécessaire des paramètres du modèle	32
3.2.2	Précision des mesures	35
3.2.3	Critère d'arrêt de l'algorithme d'identification	37
3.3	Détecter les problèmes d'identifiabilité des paramètres	38
3.4	Améliorer l'identifiabilité des paramètres	40
3.5	Exemple	42
3.5.1	Calcul des précisions nécessaires sur les paramètres	42
3.5.2	Calcul du bruit de mesure maximal admissible	45
3.5.3	Choix des configurations de mesure	46
3.5.4	Analyse des résultats	49
3.6	Effet des erreurs de modélisation	50
3.7	Conclusion	51

3.1 Introduction

L'étalonnage est souvent perçu comme un moyen d'améliorer certains critères de performance d'un manipulateur. Cette vision ne correspond malheureusement pas à une réalité des problématiques en robotique. En effet, les manipulateurs sont conçus et fabriqués au regard de certains critères de performance à atteindre sur leur espace de travail. Les erreurs d'assemblage et de fabrication détériorent ces performances et le processus d'étalonnage doit être vu comme un moyen de garantir certains critères de performance sur l'espace de travail du manipulateur par une meilleure connaissance de son modèle. A partir de ce point de vue, certaines conditions sur la précision des paramètres à identifier ou encore sur la qualité des mesures à réaliser sont nécessaires pour pouvoir garantir une bonne qualité d'étalonnage. Ainsi, une étape préalable de préparation, reposant sur les équations de modèle et d'identification, est nécessaire en amont de l'étalonnage. Les conditions nécessaires et/ou suffisantes à l'étalonnage sont introduites dans ce chapitre. Nous verrons qu'en plus de garantir des résultats d'étalonnage satisfaisants, elles permettent aussi de définir une condition ayant une réelle signification physique afin de détecter les problèmes d'identifiabilité des paramètres. Nous finirons par une discussion sur l'effet des erreurs de modèle sur les résultats d'étalonnage.

3.2 Conditions nécessaires à l'étalonnage

Afin d'introduire les conditions nécessaires à la bonne conduite de l'étalonnage, nous focaliserons sur l'étalonnage en statique, mais la méthode développée ci-dessous est générale et peut être appliquée à tout autre type d'étalonnage.

Considérons un manipulateur, d'architecture sériele ou parallèle, avec n_ρ actionneurs contrôlant n_x degrés de liberté ($n_\rho \geq n_x$). L'objectif de l'étalonnage en statique est de garantir une certaine précision absolue sur tout l'espace de travail \mathcal{W} du manipulateur. Notons $\Delta \mathbf{x}_f$ le vecteur des erreurs maximales permises en valeur absolue sur les paramètres de pose. En dehors de toute considération d'étalonnage, nous allons voir comment les modèles géométriques permettent de relier les erreurs sur les paramètres aux erreurs de positionnement. Il sera alors possible de définir la précision nécessaire à la connaissance des paramètres du modèle afin de pouvoir garantir la précision $\Delta \mathbf{x}_f$ sur l'ensemble de l'espace de travail du manipulateur.

3.2.1 Précision nécessaire des paramètres du modèle

Le modèle géométrique exact \mathbf{f}^* du manipulateur relie les coordonnées articulaires $\boldsymbol{\rho}_p$ aux coordonnées généralisées \mathbf{x}_p de la pose p en faisant intervenir les $n_{\xi_{\text{tot}}}$ paramètres $\boldsymbol{\xi}_{\text{tot}}$ du modèle. Si toutes les variables intervenant dans \mathbf{f}^* prennent leur valeur exacte, c'est-à-dire que les coordonnées exactes articulaires $\boldsymbol{\rho}_p^*$ sont connues, de même que les coordonnées généralisées exactes \mathbf{x}_p^* de la pose p et les paramètres $\boldsymbol{\xi}_{\text{tot}}^*$ du modèle, alors \mathbf{f}^* vérifie l'égalité de (3.1) :

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}_p^*, \boldsymbol{\rho}_p^*, \boldsymbol{\xi}_{\text{tot}}^*) = 0 \quad (3.1)$$

Les $n_{\xi_{\text{tot}}}$ paramètres $\boldsymbol{\xi}_{\text{tot}}$ du modèle prennent en compte toutes les sources d'erreurs influençant le comportement géométrique du manipulateur : raideur, température, humidité,

etc. Un tel modèle est très complexe et extrêmement difficile à obtenir. C'est pourquoi le modèle géométrique est souvent simplifié en une fonction \mathbf{f} dépendant de n_ξ paramètres, avec $n_\xi \leq n_{\xi_{\text{tot}}}$, décrits par le vecteur $\boldsymbol{\xi}$. Dans ce cas, les sources d'erreurs non considérées dans \mathbf{f} peuvent être prises en compte dans un vecteur d'erreur $\boldsymbol{\varepsilon}_f^p$ dépendant de la pose p [Are12], avec $\boldsymbol{\xi}^*$ les valeurs exactes du vecteur $\boldsymbol{\xi}$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_p^*, \boldsymbol{\rho}_p^*, \boldsymbol{\xi}^*) = \boldsymbol{\varepsilon}_f^p \quad (3.2)$$

Le vecteur d'erreur $\boldsymbol{\varepsilon}_f^p$ est simplement le ou les résidus des équations du modèle simplifié \mathbf{f} lorsque toutes les variables intervenant dans son calcul prennent leurs valeurs exactes, c'est-à-dire lorsque les coordonnées articulaires et généralisées $\boldsymbol{\rho}_p$ et \mathbf{x}_p de la pose p sont connues parfaitement ($\boldsymbol{\rho}_p = \boldsymbol{\rho}_p^*$ et $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p^*$), ainsi que les n_ξ paramètres du modèle ($\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^*$). Il est cependant à noter qu'en diminuant le nombre de paramètres du modèle, il n'est plus possible de définir des valeurs exactes pour les paramètres $\boldsymbol{\xi}$ puisque le modèle \mathbf{f} n'est qu'une approximation du comportement réel du manipulateur. Nous considérerons donc que les valeurs idéales $\boldsymbol{\xi}^*$ sont les valeurs qui minimisent les erreurs $\boldsymbol{\varepsilon}_f^p$ sur tout l'espace de travail. C'est-à-dire les valeurs pour lesquelles $\boldsymbol{\varepsilon}_f^p$ peut être bornée par $-\boldsymbol{\varepsilon}_f^{\max} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_f^p \leq \boldsymbol{\varepsilon}_f^{\max}$ sur \mathcal{W} , avec $\|\boldsymbol{\varepsilon}_f^{\max}\|$ la plus petite possible. Cependant, d'une part plusieurs jeux de paramètres $\boldsymbol{\xi}^*$ peuvent satisfaire cette condition, et d'autre part la solution dépendra de la norme utilisée, si $\boldsymbol{\varepsilon}_f^p$ est un vecteur d'erreur. En réalité, la façon de poser le problème définit le type d'étalonnage à réaliser, et les valeurs $\boldsymbol{\xi}^*$ sont les solutions « optimales » du processus d'étalonnage. Cependant, même si les paramètres $\boldsymbol{\xi}$ interviennent dans les conditions d'étalonnage, leur valeur exacte n'est pas nécessaire au calcul de la précision à atteindre, comme nous le verrons ci-dessous.

Considérons donc que lors du calcul, ou de l'estimation, des valeurs $\boldsymbol{\xi}^c$ des paramètres $\boldsymbol{\xi}$ du modèle, une erreur $\delta\boldsymbol{\xi}^*$ a été commise par rapport à leur valeur idéale $\boldsymbol{\xi}^*$, telle que $\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi}^c + \delta\boldsymbol{\xi}^*$. De même, à cause des erreurs de mesure, les coordonnées articulaires exactes $\boldsymbol{\rho}_p^*$ en la pose p sont connues avec une précision $\delta\boldsymbol{\rho}_p^*$ par rapport à leur valeur mesurée $\boldsymbol{\rho}_p^c$ telle que $\boldsymbol{\rho}_p^* = \boldsymbol{\rho}_p^c + \delta\boldsymbol{\rho}_p^*$. À partir des valeurs calculées $\boldsymbol{\rho}_p^c$ et $\boldsymbol{\xi}^c$, il est possible de calculer la pose \mathbf{x}_p^c du manipulateur par l'intermédiaire du modèle géométrique \mathbf{f} . Étant donné qu'aucune estimation des erreurs $\boldsymbol{\varepsilon}_f^p$ n'est disponible, le calcul de la pose \mathbf{x}_p^c du manipulateur s'effectue habituellement en résolvant (3.3) :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c) = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

La résolution de (3.3) génère donc une erreur $\delta\mathbf{x}_p^*$ par rapport à la pose réelle \mathbf{x}_p^* telle que $\mathbf{x}_p^* = \mathbf{x}_p^c + \delta\mathbf{x}_p^*$. De plus, calculer la pose \mathbf{x}_p^c de l'organe effecteur à partir des paramètres du modèle et des informations proprioceptives fait appel au modèle géométrique direct. Dans le cas des robots parallèles, la résolution de (3.3) nécessite donc le recours à un algorithme itératif [Mer93b]. Ainsi, (3.3) est en réalité égale à un résidu dans le cas des robots parallèles. La précision des algorithmes numériques actuels nous permet cependant de négliger ce résidu pour calculer l'erreur commise $\delta\mathbf{x}_p^*$. Cette erreur peut être estimée en écrivant l'approximation linéaire de \mathbf{f} au voisinage de la solution exacte, avec \mathbf{J}_x , \mathbf{J}_ρ et \mathbf{J}_ξ les matrices jacobienues de la fonction \mathbf{f} par rapport à \mathbf{x} , $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\xi}$ respectivement :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}_p^*, \boldsymbol{\rho}_p^*, \boldsymbol{\xi}^*) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p^c + \delta\mathbf{x}_p^*, \boldsymbol{\rho}_p^c + \delta\boldsymbol{\rho}_p^*, \boldsymbol{\xi}^c + \delta\boldsymbol{\xi}^*) \\ &\approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c) + \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c)\delta\mathbf{x}_p^* + \mathbf{J}_\rho(\mathbf{x}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c)\delta\boldsymbol{\rho}_p^* + \mathbf{J}_\xi(\mathbf{x}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c)\delta\boldsymbol{\xi}^* \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les matrices jacobienues \mathbf{J}_x , \mathbf{J}_ρ et \mathbf{J}_ξ sont obtenues en différenciant le modèle géométrique par rapport à chacun des paramètres, par exemple $\mathbf{J}_x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$, et sont calculées avec les paramètres estimés ξ^c et les coordonnées articulaires et généralisées ρ_p^c et \mathbf{x}_p^c de la pose p . Pour des raisons de simplification d'écriture, nous noterons par la suite $\mathbf{J}_x^p = \mathbf{J}_x(\mathbf{x}_p^c, \rho_p^c, \xi^c)$ (de même pour \mathbf{J}_ρ^p et \mathbf{J}_ξ^p). L'approximation linéaire de \mathbf{f} permet d'obtenir une approximation de l'erreur ε_f^p commise pour la pose p pour ce modèle :

$$\varepsilon_f^p \approx \mathbf{J}_x^p \delta \mathbf{x}_p^* + \mathbf{J}_\rho^p \delta \rho_p^* + \mathbf{J}_\xi^p \delta \xi^* \quad (3.5)$$

Considérons maintenant le meilleur des cas, pour lequel les erreurs de modèle ε_f^p sont négligeables dans (3.5) devant l'influence des autres variables, c'est-à-dire que nous supposons que le modèle simplifié \mathbf{f} est une bonne approximation du comportement réel \mathbf{f}^* du manipulateur. Cette hypothèse n'est pas excessive puisque le modèle doit être suffisamment réaliste pour pouvoir garantir les performances du manipulateur : une précision $\Delta \mathbf{x}_f$ dans notre cas. Nous discuterons cependant de l'influence des erreurs de modèle sur les résultats d'étalonnage en section 3.6.

En négligeant les erreurs de modèle ε_f^p et en considérant un espace de travail dénué de toute singularité ($\forall \{\rho_p, \mathbf{x}_p, \xi\}$, \mathbf{J}_x^p est inversible), (3.5) peut donc s'écrire¹ :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_p^* &= -(\mathbf{J}_x^p)^{-1} \mathbf{J}_\rho^p \delta \rho_p^* - (\mathbf{J}_x^p)^{-1} \mathbf{J}_\xi^p \delta \xi^* \\ &= \hat{\mathbf{J}}_\rho^p \delta \rho_p^* + \hat{\mathbf{J}}_\xi^p \delta \xi^* \end{aligned} \quad (3.6)$$

Grâce à (3.6), il est alors possible de calculer la précision nécessaire $\Delta \xi^{\text{nec}}$ sur les paramètres du modèle ξ qui garantissent la précision $\Delta \mathbf{x}_f$ sur l'espace de travail \mathcal{W} . En effet, la condition sur la précision peut s'écrire :

$$\forall \mathbf{x}_p \in \mathcal{W}, \quad |\delta \mathbf{x}_p^*| \leq \Delta \mathbf{x}_f \quad (3.7)$$

Nous pouvons supposer que les erreurs capteurs $\delta \rho_p^*$ sont bornées et donc définir $\Delta \rho$ telle que $\delta \rho_p^* \in [-\Delta \rho; \Delta \rho]$. En posant $\delta \xi^* \in [-\Delta \xi^{\text{nec}}; \Delta \xi^{\text{nec}}]$ et en introduisant l'opérateur $\text{abs}(\mathbf{M})$ qui retourne une matrice de la même dimension que \mathbf{M} et dont chaque élément est la valeur absolue de l'élément de \mathbf{M} correspondant, on obtient avec (3.6) et (3.7) :

$$\forall \mathbf{x}_p \in \mathcal{W}, \quad \text{abs}(\hat{\mathbf{J}}_\rho^p) \Delta \rho + \text{abs}(\hat{\mathbf{J}}_\xi^p) \Delta \xi^{\text{nec}} \leq \Delta \mathbf{x}_f \quad (3.8)$$

L'équation (3.8) considère le pire des cas, c'est-à-dire lorsque les erreurs de mesure $\delta \rho_p^*$ issues des capteurs actionneurs sont toutes maximales et ont le plus d'influence sur la précision $\delta \mathbf{x}_p^*$, de même pour les erreurs $\delta \xi^*$ commises sur les paramètres du modèle. Mais ce cas est susceptible d'être rencontré lors du fonctionnement du manipulateur. Cependant, si aucune forme analytique des matrices $\hat{\mathbf{J}}_\rho^p$ et $\hat{\mathbf{J}}_\xi^p$ n'est disponible, il reste difficile d'estimer $\Delta \xi^{\text{nec}}$ avec (3.8) puisque ces jacobienues sont fonction de la position \mathbf{x}_p de l'effecteur sur l'espace de travail. Deux cas peuvent alors se distinguer : le cas d'espaces de travail de taille réduite, et celui d'espaces de travail plus importants.

1. Dans le cas des robots parallèles, il est souvent difficile d'obtenir une forme analytique de la matrice Jacobienne cinématique directe $\hat{\mathbf{J}}_\rho$. Cependant, les calculs suivants peuvent tout aussi bien être menés numériquement.

Dans le cas de faibles espaces de travail, d'une part la jacobienne cinématique peut être considérée constante sur l'espace de travail dans certains cas, par exemple pour le contrôle d'un micro-manipulateur [Zha02]; d'autre part, il est possible de borner indépendamment chaque élément d'une matrice plutôt que de chercher la pose dans l'espace de travail pour laquelle la matrice a le plus d'influence dans (3.8). Par exemple, en introduisant l'opérateur $\max_{\mathcal{W}}(\mathbf{M})$ qui retourne une matrice \mathbf{M}' dont chaque élément m'_{ij} est la valeur maximale sur \mathcal{W} de l'élément m_{ij} de \mathbf{M} correspondant, c'est-à-dire $\forall \{i, j\}, m'_{ij} = \max_{\mathcal{W}}(m_{ij})$, la condition de (3.8) peut s'écrire :

$$\max_{\mathcal{W}}(\text{abs}(\hat{\mathbf{J}}_{\xi}^p))\Delta\xi^{\text{nec}} = \Delta\mathbf{x}_f - \max_{\mathcal{W}}(\text{abs}(\hat{\mathbf{J}}_{\rho}^p))\Delta\rho \quad (3.9)$$

Bien entendu, cette approximation facilite le calcul des $\Delta\xi^{\text{nec}}$ mais peut conduire à une surestimation de la condition (3.8). La surestimation réalisée est souvent acceptable dans le cas de faibles espaces de travail, mais peut être trop contraignante sur la valeur des $\Delta\xi^{\text{nec}}$ pour des espaces de travail plus importants. Dans ce cas, il est alors possible de revenir au cas de faibles espaces de travail en discrétisant l'espace de travail total \mathcal{W} en plusieurs espaces de travail plus petits \mathcal{W}' . Cette discrétisation doit cependant être réfléchie. Par exemple, une façon performante de mener à bien cette discrétisation est d'utiliser l'analyse par intervalles [Gou11, Mer05b] qui permet d'ajuster le pas de discrétisation à la précision souhaitée sur $\Delta\xi^{\text{nec}}$. Notons de plus qu'une variante de l'algorithme décrit dans [Mer06a] permettrait la résolution directe du système de (3.6) et (3.7) par l'intermédiaire là encore de l'analyse par intervalles.

Dans tous les cas, un modèle comporte bien souvent plus de paramètres ξ que le nombre de degrés de liberté du manipulateur, et donc que la dimension de $\Delta\mathbf{x}_f$. La condition de (3.8) est donc un système sous-déterminé et plusieurs jeux de valeurs sur les précisions $\Delta\xi^{\text{nec}}$ des paramètres du modèle peuvent satisfaire (3.8). Le choix du vecteur $\Delta\xi^{\text{nec}}$ parmi l'ensemble des solutions possibles peut être effectué en considérant la nature des paramètres, ainsi que les tolérances de fabrication et d'assemblage. Par exemple, dans le cas de la plate-forme de Gough de la figure 2.5b, la même précision peut être choisie pour chaque longueur de jambe l_i étant donné que ces paramètres ont le même ordre de grandeur, et souvent la même qualité de fabrication. Il en va de même pour les positions des points d'attache A_i et B_i .

A partir de la précision nécessaire $\Delta\xi^{\text{nec}}$ sur les paramètres du modèle pouvant garantir la précision finale $\Delta\mathbf{x}_f$ du manipulateur sur tout son espace de travail, il est alors possible de définir une borne sur la précision nécessaire des mesures à réaliser pour l'étalonnage. Nous verrons aussi qu'il est possible de revenir sur le choix du jeu des valeurs de $\Delta\xi^{\text{nec}}$ à considérer afin de diminuer la précision nécessaire des mesures.

3.2.2 Précision des mesures

Une fois le modèle développé et les précisions nécessaires $\Delta\xi^{\text{nec}}$ sur les paramètres du modèle calculées, l'étape suivante du processus d'étalonnage consiste à effectuer des mesures additionnelles permettant de réaliser la phase d'identification. Pour chaque configuration de mesure \mathbf{x}_p , avec $p = 1..N_p$, m mesures additionnelles sont réalisées et consignées dans le vecteur \mathbf{m}_p . Ces mesures sont reliées aux paramètres du modèle par l'intermédiaire de la

fonction d'identification \mathbf{g}_p de la pose p . Dans le cas idéal, c'est-à-dire pour des mesures exactes \mathbf{m}_p^* et $\boldsymbol{\rho}_p^*$, et en considérant les valeurs idéales des paramètres du modèle $\boldsymbol{\xi}^*$, la fonction d'identification \mathbf{g}_p est égale à un résidu ε_p qui tient compte des erreurs de modèle :

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p^*, \boldsymbol{\rho}_p^*, \boldsymbol{\xi}^*) = \varepsilon_p \quad (3.10)$$

Comme précédemment, les mesures ne sont pas parfaites et un écart $\delta\mathbf{m}_p^*$ sépare la valeur mesurée \mathbf{m}_p^c de la valeur exacte \mathbf{m}_p^* tel que : $\mathbf{m}_p^* = \mathbf{m}_p^c + \delta\mathbf{m}_p^*$, avec $\delta\mathbf{m}_p^* \in [-\Delta\mathbf{m}; \Delta\mathbf{m}]$ si $\Delta\mathbf{m}$ est le bruit de mesure. En considérant les matrices jacobiennes \mathbf{G}_m , \mathbf{G}_ρ et \mathbf{G}_ξ de la fonction \mathbf{g}_p par rapport à \mathbf{m} , $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\xi}$ respectivement, telles que $\mathbf{G}_x = \frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \mathbf{x}}$, cet écart peut être relié aux erreurs $\delta\boldsymbol{\rho}_p^*$ et $\delta\boldsymbol{\xi}^*$ sur les mesures des capteurs des actionneurs et sur les paramètres du modèle, précédemment définies, en différenciant (3.10) :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c) &\approx \mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p^*, \boldsymbol{\rho}_p^*, \boldsymbol{\xi}^*) - \mathbf{G}_m(\mathbf{m}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c) \delta\mathbf{m}_p^* - \mathbf{G}_\rho(\mathbf{m}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c) \delta\boldsymbol{\rho}_p^* - \mathbf{G}_\xi(\mathbf{m}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c) \delta\boldsymbol{\xi}^* \\ &\approx \varepsilon_p - \mathbf{G}_m(\mathbf{m}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c) \delta\mathbf{m}_p^* - \mathbf{G}_\rho(\mathbf{m}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c) \delta\boldsymbol{\rho}_p^* - \mathbf{G}_\xi(\mathbf{m}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c) \delta\boldsymbol{\xi}^* \end{aligned} \quad (3.11)$$

Comme précédemment, nous utiliserons la notation $\mathbf{G}_m^p = \mathbf{G}_m(\mathbf{m}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c)$ afin de simplifier l'écriture (de même pour \mathbf{G}_ρ^p et \mathbf{G}_ξ^p).

L'effet des erreurs de modèle ε_p sur les résultats d'étalonnage sera étudié en section 3.6. Nous considérons ici que le modèle développé représente suffisamment bien le comportement réel du manipulateur, c'est-à-dire que le résidu de la fonction d'identification ε_p peut être négligé devant la variation des autres paramètres de \mathbf{g}_p dans (3.11) :

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c) \approx -\mathbf{G}_m^p \delta\mathbf{m}_p^* - \mathbf{G}_\rho^p \delta\boldsymbol{\rho}_p^* - \mathbf{G}_\xi^p \delta\boldsymbol{\xi}^* \quad (3.12)$$

Afin de pouvoir réaliser l'étalonnage, il est nécessaire d'avoir plus d'équations que d'inconnues. Ainsi, l'identification des erreurs de mesure $\delta\mathbf{m}_p^*$ n'est pas possible pour chaque pose p puisqu'il y aurait autant de variations $\delta\mathbf{m}_p^*$ à estimer que d'équations. En ce qui concerne l'identification des $\delta\boldsymbol{\rho}_p^*$, celle-ci d'une part nécessiterait un grand nombre de mesures pour chaque configuration p , et d'autre part n'a pas grand intérêt puisque ces erreurs, bien qu'existantes, ne pourront pas être identifiées après étalonnage puisque de nature aléatoire. Ainsi, l'étalonnage est toujours réalisé sous l'hypothèse nécessaire que la fonction d'identification \mathbf{g}_p dépend principalement des variations $\delta\boldsymbol{\xi}^*$ des paramètres du modèle. Cette hypothèse peut s'écrire :

$$\forall p = 1..N_p, \quad \text{abs}(\mathbf{G}_m^p \delta\mathbf{m}_p^* + \mathbf{G}_\rho^p \delta\boldsymbol{\rho}_p^*) \ll \text{abs}(\mathbf{G}_\xi^p \delta\boldsymbol{\xi}^*) \quad (3.13)$$

Cette hypothèse doit aussi être valable dans le pire des cas, c'est-à-dire lorsque les erreurs $\delta\boldsymbol{\rho}_p^*$ commises sur les mesures de la position des actionneurs sont maximales ($\text{abs}(\delta\boldsymbol{\rho}_p^*) = \Delta\boldsymbol{\rho}$) et lorsque les paramètres sont connus à leur précision nécessaire ($\text{abs}(\delta\boldsymbol{\xi}^*) = \Delta\boldsymbol{\xi}^{\text{nec}}$). Dans ce cas, $\text{abs}(\mathbf{G}_m^p \delta\mathbf{m}_p^* + \mathbf{G}_\rho^p \delta\boldsymbol{\rho}_p^*)$ peut être surestimé par $\text{abs}(\mathbf{G}_m^p) \Delta\mathbf{m}^{\text{max}} + \text{abs}(\mathbf{G}_\rho^p) \Delta\boldsymbol{\rho}$, ce qui permet d'obtenir une condition sur le bruit de mesure maximal admissible $\Delta\mathbf{m}^{\text{max}}$:

$$\forall p = 1..N_p, \quad \text{abs}(\mathbf{G}_m^p) \Delta\mathbf{m}^{\text{max}} + \text{abs}(\mathbf{G}_\rho^p) \Delta\boldsymbol{\rho} < \text{abs}(\mathbf{G}_\xi^p) \Delta\boldsymbol{\xi}^{\text{nec}} \quad (3.14)$$

La condition (3.14) permet cependant de n'obtenir qu'une borne supérieure pour le bruit de mesure acceptable $\Delta\mathbf{m}^{\text{max}}$. En effet, aucune minimisation du terme de droite n'est possible,

celle-ci dépendant du signe des erreurs $\delta\boldsymbol{\xi}^*$ commises sur chacun des paramètres. Ainsi, seule une surestimation est disponible dans le pire des cas : $\text{abs}(\mathbf{G}_\xi^p \delta\boldsymbol{\xi}^*) \leq \text{abs}(\mathbf{G}_\xi^p) \Delta\boldsymbol{\xi}^{\text{nec}}$. La valeur de $\Delta\mathbf{m}^{\text{max}}$ qui satisfait (3.14) n'est alors qu'une borne supérieure du maximum du bruit de mesure admissible : pour un bruit de mesure supérieur, l'hypothèse de (3.13) n'est pas satisfaite dans le pire des cas, mais rien ne garantit (3.13) pour un bruit de mesure inférieur puisque le terme $\text{abs}(\mathbf{G}_\xi^p \delta\boldsymbol{\xi}^*)$ ne peut être minimisé.

Cependant, il est toutefois intéressant de chercher à rendre maximale cette borne supérieure sur le bruit de mesure. Ceci peut être effectué par un choix judicieux des configurations de mesure. En effet, contrairement à la précision nécessaire $\Delta\boldsymbol{\xi}^{\text{nec}}$ sur les paramètres du modèle, (3.14) ne doit être vérifiée que sur les N_p configurations de mesure, et non sur tout l'espace de travail. Ainsi, si le bruit de mesure maximal admissible $\Delta\mathbf{m}^{\text{max}}$ est trop faible et nécessite donc une instrumentation coûteuse, il est possible de choisir judicieusement les configurations de mesure afin de garantir (3.14) avec un bruit de mesure $\Delta\mathbf{m}^{\text{max}}$ plus élevé. Ce choix est souvent réalisé par l'intermédiaire des indices d'observabilité qui agissent sur les propriétés de la matrice d'identification $\mathbf{G}_\xi = [\mathbf{G}_\xi^{1T} \dots \mathbf{G}_\xi^{N_p T}]^T$. Cependant, au regard de (3.14), il est facile de constater que l'optimisation du choix des poses peut aussi être réalisée en considérant les matrices $\mathbf{G}_m = [\mathbf{G}_m^{1T} \dots \mathbf{G}_m^{N_p T}]^T$ et $\mathbf{G}_\rho = [\mathbf{G}_\rho^{1T} \dots \mathbf{G}_\rho^{N_p T}]^T$. D'autre part, si le choix des configurations optimales ne suffit pas à rendre le bruit de mesure $\Delta\mathbf{m}^{\text{max}}$ acceptable, il est possible de revenir sur le choix des $\Delta\boldsymbol{\xi}^{\text{nec}}$ puisque ceux-ci interviennent dans la condition de (3.14).

Afin de garantir que l'ensemble des fonctions d'identification \mathbf{g}_p , avec $p = 1..N_p$, ne dépende que des variations des paramètres $\boldsymbol{\xi}$ du modèle, et ainsi de garantir l'identification des paramètres, il est donc nécessaire de choisir un instrument de mesure ayant une précision $\Delta\mathbf{m} < \Delta\mathbf{m}^{\text{max}}$.

3.2.3 Critère d'arrêt de l'algorithme d'identification

Nous considérerons comme algorithme d'identification une méthode itérative de type Newton (voir chapitre 2). Même si ces méthodes ne permettent pas de garantir la convergence de l'algorithme d'identification, contrairement à des méthodes par intervalle par exemple [Dan06, AdS13], elles restent actuellement les méthodes les plus utilisées pour l'étalonnage. La condition de (3.14) permet de considérer que la fonction d'identification \mathbf{g}_p de la pose p dépend principalement des variations $\delta\boldsymbol{\xi}$ des paramètres du modèle, c'est-à-dire :

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p^c, \boldsymbol{\rho}_p^c, \boldsymbol{\xi}^c) \approx -\mathbf{G}_\xi^p \delta\boldsymbol{\xi} \quad (3.15)$$

En considérant l'ensemble des configurations d'étalonnage, donc en considérant la fonction d'identification totale $\mathbf{g} = [\mathbf{g}_1^T \dots \mathbf{g}_{N_p}^T]^T$ constituée des fonctions d'identification \mathbf{g}_p pour $p = 1..N_p$, les équations normales à l'itération j , définies dans la section 2.5, peuvent s'écrire :

$$\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi \delta\boldsymbol{\xi}^{j+1} = -\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{g}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}^c + \sum_{i=1}^j \delta\boldsymbol{\xi}^i) \quad , \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{G}_\xi = [\mathbf{G}_\xi^{1T} \dots \mathbf{G}_\xi^{N_p T}]^T \\ \mathbf{m} = [\mathbf{m}_1^T \dots \mathbf{m}_{N_p}^T]^T \\ \boldsymbol{\rho} = [\boldsymbol{\rho}_1^T \dots \boldsymbol{\rho}_{N_p}^T]^T \end{cases} \quad (3.16)$$

Une estimation des paramètres est ensuite obtenue par $\boldsymbol{\xi}_{\text{est}} = \boldsymbol{\xi}^c + \sum_{i=1}^{j_{\text{max}}} \delta\boldsymbol{\xi}^i$, j_{max} étant l'indice de la dernière itération. Dans la plupart des cas, l'algorithme d'optimisation est stoppé

lorsque le résidu de la fonction objectif $h = \mathbf{g}^T \mathbf{g}$ utilisée pour la méthode des moindres carrés est en-dessous d'un certain seuil. Cependant, les erreurs de mesure doivent pouvoir être considérées dans ce seuil. Une façon d'estimer ce seuil est de considérer le résidu \mathbf{g}^{\min} de la fonction d'identification \mathbf{g} lorsque les paramètres du modèle sont correctement estimés et que le bruit de mesure est maximal sur chaque pose. En considérant les matrices \mathbf{G}_m et \mathbf{G}_ρ , ce résidu peut être estimé par : $\mathbf{g}^{\min} = \text{abs}(\mathbf{G}_m)\Delta\mathbf{m} + \text{abs}(\mathbf{G}_\rho)\Delta\rho$.

Comme le montre la condition de (3.14), si les valeurs de la fonction d'identification deviennent inférieures à \mathbf{g}^{\min} au cours des itérations de l'algorithme d'identification, les corrections $\delta\xi^i$ à apporter sur les paramètres du modèle risquent de ne considérer que le bruit de mesure et pourront conduire à une mauvaise estimation des paramètres. L'algorithme itératif doit donc être arrêté avant que les résidus de la fonction d'identification \mathbf{g} soient en dessous de \mathbf{g}^{\min} . Une façon simple de s'assurer de cette condition est de considérer la précision nécessaire $\Delta\xi^{\text{nec}}$ sur les paramètres du modèle. En effet, grâce à (3.14), le bruit de mesure $\Delta\mathbf{m}$ a été choisi de telle sorte que la précision $\Delta\xi^{\text{nec}}$ puisse être atteinte lors du processus d'identification. Ainsi, le critère d'arrêt pour l'algorithme d'optimisation itératif peut être :

$$\text{abs}(\delta\xi^{j_{\max}}) \leq \Delta\xi^{\text{nec}} \quad (3.17)$$

Ce critère a une réelle signification physique puisqu'il permet de stopper l'algorithme d'identification lorsque la précision nécessaire sur les paramètres du modèle a été atteinte. Cependant, les trois conditions développées ci-dessus sont nécessaires mais pas suffisantes à l'étalonnage. Dans certains cas, la connaissance des paramètres du modèle peut ne pas être améliorée à cause d'une mauvaise identifiabilité des paramètres. Les conditions développées seront néanmoins utiles pour définir un critère numérique ayant une réelle signification physique afin de pouvoir détecter les problèmes d'identifiabilité des paramètres lors de l'étalonnage.

3.3 Détecter les problèmes d'identifiabilité des paramètres

Les problèmes d'identifiabilité des paramètres peuvent être détectés à travers une analyse des valeurs singulières de la matrice d'identification $\mathbf{G}_\xi = [\mathbf{G}_\xi^{1T} \dots \mathbf{G}_\xi^{N_p T}]^T$. Comme précédemment explicité en section 2.5.3, il est nécessaire de mettre à l'échelle la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ afin de pouvoir comparer ses valeurs singulières [Hol08].

La matrice d'identification peut être normalisée en fonction des paramètres et/ou des mesures. On parle alors de normalisation à droite ou à gauche respectivement [Hol93]. Ces appellations proviennent des équations normales d'étalonnage (3.16). La normalisation par rapport aux mesures revient à multiplier la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ à gauche par une matrice \mathbf{N}_g tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_g^{-1} \mathbf{g} &= -\mathbf{N}_g^{-1} \mathbf{G}_\xi \delta\xi \\ \rightarrow \hat{\mathbf{g}} &= -\mathbf{N}_g^{-1} \mathbf{G}_\xi \delta\xi \end{aligned} \quad (3.18)$$

L'objectif est alors de définir un vecteur $\hat{\mathbf{g}}$ afin de pouvoir contrôler l'influence de chaque mesure lors de l'identification. Afin de réaliser l'identification des paramètres par la méthode des moindres carrés (voir chapitre 2), il est nécessaire de définir un critère chiffré unique à minimiser. Ce critère est souvent défini comme la norme euclidienne de \mathbf{g} et chaque élément

de la fonction d'identification \mathbf{g} doit donc être du même ordre de grandeur pour avoir la même influence sur le critère à minimiser. Dans le cas par exemple où la fonction d'identification mélange des données de position et d'orientation, il est nécessaire de réfléchir au choix de la normalisation afin que toutes les mesures aient la même influence sur la minimisation du critère. Afin de rendre les éléments de \mathbf{g} comparables, les auteurs proposent de considérer le bruit de mesure par l'intermédiaire d'une matrice de covariance [Wam95, Hol93, Hol96]. Ainsi, les éléments de \mathbf{g} sont sans dimension et comparables.

Dans notre cas, et grâce aux conditions précédemment développées, nous avons accès aux valeurs de la fonction d'identification lorsque les mesures sont bruitées au maximum : \mathbf{g}^{\min} . Ainsi, il est facile de définir une matrice \mathbf{N}_g de normalisation à gauche telle que, avec $\text{diag}(\mathbf{x})$ une matrice carrée dont les termes diagonaux sont les éléments du vecteur \mathbf{x} :

$$\mathbf{N}_g = \text{diag}(\mathbf{g}^{\min}) \quad (3.19)$$

En ce qui concerne la normalisation des paramètres, celle-ci s'effectue en multipliant la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ à droite par une matrice \mathbf{N}_d tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -\mathbf{G}_\xi \mathbf{N}_d \mathbf{N}_d^{-1} \delta \xi \\ \rightarrow \mathbf{g} &= -\mathbf{G}_\xi \mathbf{N}_d \delta \hat{\xi} \end{aligned} \quad (3.20)$$

De même que précédemment, l'objectif est de gérer l'influence de chaque variation de paramètre sur la fonction d'identification. Les auteurs proposent généralement de donner la même influence à chaque variation $\delta \xi$. Ceci peut être effectué en normalisant chaque colonne de la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ [Hol93]. Cependant, d'une part tous les paramètres n'ont pas la même influence sur la précision finale du manipulateur, et d'autre part cette normalisation revient à considérer qu'un mètre équivaut à un nombre arbitraire de radian (si ce sont les unités utilisées pour définir les paramètres de longueur et de rotation). Ce choix peut être justifié pour des manipulateurs « à taille humaine » [Hol08], mais reste très subjectif dans la majorité des cas. Il est donc préférable, comme pour les mesures, de considérer les précisions nécessaires $\Delta \xi^{\text{nec}}$ telles que :

$$\mathbf{N}_d = \text{diag}(\Delta \xi^{\text{nec}}) \quad (3.21)$$

Dans le pire des cas, c'est-à-dire lorsque les valeurs des paramètres ξ s'approchent de leurs valeurs idéales ξ^* et lorsque les mesures sont hautement bruitées, les vecteurs nouvellement définis $\hat{\mathbf{g}}$ et $\delta \hat{\xi}$ ont alors toutes leurs composantes voisines de 1. Il est donc aussi possible de normaliser ces vecteurs en considérant le pire des cas, où $\|\hat{\mathbf{g}}\|_2 = \sqrt{m \cdot N_p}$ et $\|\delta \hat{\xi}\|_2 = \sqrt{n_\xi}$, avec m le nombre de mesures réalisées pour chaque pose $p = 1..N_p$ et n_ξ le nombre de paramètres du modèle. Cette normalisation permet alors de définir une matrice d'identification normalisée \mathbf{H}_ξ telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\xi &= \sqrt{\frac{n_\xi}{m \cdot N_p}} \mathbf{N}_g^{-1} \mathbf{G}_\xi \mathbf{N}_d \\ &= \sqrt{\frac{n_\xi}{m \cdot N_p}} \text{diag}(\mathbf{g}^{\min})^{-1} \mathbf{G}_\xi \text{diag}(\Delta \xi^{\text{nec}}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ce qui conduit à de nouvelles équations normales d'étalonnage :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}} = -\mathbf{H}_\xi \delta \tilde{\xi} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{g}} &= \frac{1}{\sqrt{m \cdot N_p}} \hat{\mathbf{g}} = \frac{1}{\sqrt{m \cdot N_p}} \text{diag}(\mathbf{g}^{\min})^{-1} \mathbf{g} \\ \text{et} \quad \delta \tilde{\xi} &= \frac{1}{\sqrt{n_\xi}} \delta \hat{\xi} = \frac{1}{\sqrt{n_\xi}} \text{diag}(\Delta \xi^{\text{nec}})^{-1} \delta \xi \end{aligned} \quad (3.23)$$

Avec cette matrice d'identification normalisée \mathbf{H}_ξ , il est alors possible de comparer et d'analyser ses valeurs singulières afin de détecter les problèmes d'identifiabilité des paramètres. Les valeurs singulières de \mathbf{H}_ξ peuvent être obtenues grâce à une décomposition en valeurs singulières et permettent d'écrire l'inégalité suivante [Bor91], avec σ_L et σ_1 respectivement les plus petite et plus grande valeurs singulières :

$$\sigma_L \leq \frac{\|\tilde{\mathbf{g}}\|_2}{\|\delta\tilde{\xi}\|_2} \leq \sigma_1 \quad (3.24)$$

Afin de garantir l'identifiabilité des paramètres, il faut qu'une petite variation des paramètres $\delta\xi$ ait la plus grande influence possible sur les résidus de la fonction d'identification \mathbf{g} , c'est-à-dire que le rapport $\frac{\|\tilde{\mathbf{g}}\|_2}{\|\delta\tilde{\xi}\|_2}$ soit le plus grand possible. Remarquons que l'utilisation de la norme euclidienne fait qu'un ou plusieurs paramètres peuvent avoir aucune influence sur les résidus de la fonction d'identification. Cependant, d'une part l'inégalité de (3.24) est obtenue en considérant cette norme euclidienne, et d'autre part les conditions nécessaires précédemment développées garantissent l'obtention de la précision $\Delta\xi^{\text{nec}}$ des paramètres en considérant un bruit maximum sur les mesures. Lorsque le bruit de mesure est maximal, alors $\|\tilde{\mathbf{g}}\|_2 = 1$. De même, lorsque la précision nécessaire est atteinte sur les paramètres du modèle, nous avons $\|\delta\tilde{\xi}\|_2 = 1$. Ainsi, avec les conditions d'étalonnage développées, l'identifiabilité des paramètres est possible si :

$$1 \leq \frac{\|\tilde{\mathbf{g}}\|_2}{\|\delta\tilde{\xi}\|_2} \quad (3.25)$$

Au regard de (3.24) et (3.25), une condition suffisante mais pas nécessaire à l'identifiabilité des paramètres est donc $\sigma_L \geq 1$. Ainsi, il est possible de détecter les problèmes d'identifiabilité des paramètres en étudiant la plus petite valeur singulière de la matrice d'identification normalisée, obtenue grâce aux conditions d'étalonnage précédentes. La borne de 1 sur σ_L est une condition suffisante mais pas nécessaire puisqu'elle considère le pire des cas. Il est cependant possible d'améliorer l'identifiabilité des paramètres par un choix judicieux des configurations de mesure.

3.4 Améliorer l'identifiabilité des paramètres

Le choix des N_p configurations de mesure influence les valeurs singulières de la matrice d'identification normalisée \mathbf{H}_ξ . L'identification des paramètres est possible si la plus petite valeur singulière σ_L de \mathbf{H}_ξ est supérieure à 1, comme expliqué dans la section précédente. Ainsi, il est possible de choisir les configurations de mesure afin d'augmenter la valeur de σ_L et donc d'améliorer l'identifiabilité des paramètres. Cette optimisation est bien connue et fait référence à l'indice d'observabilité O_3 proposé par Nahvi *et al.* [Nah94] (un rappel des différents indices d'observabilité est disponible en page 22).

Cependant, ne considérer que la plus petite valeur singulière σ_L ne permet pas d'améliorer l'identifiabilité de tous les paramètres, mais seulement de ceux associés à cette valeur singulière. Il semble donc intéressant d'essayer de rendre maximale chacune des valeurs singulières de la matrice d'identification. Chaque façon différente de définir le critère à maximiser définit

un nouvel indice d'observabilité, présenté en section 2.4.2.2. Une comparaison des différents indices présents dans la littérature est donnée dans [Sum08]. Les conclusions de Sun et Hollerbach montrent que O_3 est en général le meilleur indice d'observabilité lorsque la matrice d'identification est parfaitement normalisée, c'est-à-dire lorsque chaque colonne de \mathbf{G}_ξ a été normalisée. Nous avons vu dans la section précédente que cette façon de normaliser la matrice donne la même influence à chaque variation des paramètres, ce qui n'a pas de signification physique puisque tous les paramètres n'ont pas la même influence sur la précision finale du manipulateur. Sun et Hollerbach remarquent aussi que O_1 , lié au produit des valeurs singulières (voir (3.26)), n'est pas dépendant de la normalisation de la matrice d'identification et est le meilleur indice pour minimiser la variance des paramètres. Avec les conditions précédentes d'étalonnage, minimiser la variance des paramètres, et donc garantir $\Delta \xi^{\text{nec}}$, revient à garantir la précision finale souhaitée. Ainsi, dans la suite de ce document, nous considérerons comme indice d'observabilité à maximiser O_1 .

L'indice d'observabilité O_1 a été introduit par Borm et Menq [Bor91] de telle sorte que le nombre total de mesure $m.N_p$ n'intervienne pas dans les résultats, permettant ainsi la comparaison de jeux de configurations de mesure différents en taille. Cet indice est défini tel que, avec σ_i^G la i^{eme} valeur singulière de \mathbf{G}_ξ :

$$O_1 = \frac{\sqrt[n_\xi]{\sigma_1^G \cdot \sigma_2^G \dots \sigma_{n_\xi}^G}}{\sqrt{m.N_p}} \quad (3.26)$$

La relation entre les valeurs singulières σ_i de la matrice d'identification normalisée \mathbf{H}_ξ , précédemment définie, et les valeurs singulières σ_i^G de \mathbf{G}_ξ est $\sigma_i = \sqrt{\frac{n_\xi}{m.N_p}} \sigma_i^G$. Alors O_1 devient :

$$\begin{aligned} O_1 &= \sqrt{\frac{m.N_p}{n_\xi}} \frac{\sqrt[n_\xi]{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \dots \sigma_{n_\xi}}}{\sqrt{m.N_p}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n_\xi}} \prod_{i=1}^{n_\xi} \sigma_i^{\frac{1}{n_\xi}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Problème d'optimisation : Le problème d'optimisation revient alors à trouver l'ensemble des N_p configurations de mesure $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_p}\}$ qui rendent maximal

$$O_1(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{n_\xi}} \prod_{i=1}^{n_\xi} \sigma_i^{\frac{1}{n_\xi}}(\mathbf{X}) \text{ avec } \sigma_i(\mathbf{X}) \text{ la } i^{\text{eme}} \text{ valeur singulière de } \mathbf{H}_\xi(\mathbf{X}) \text{ sous contrainte}$$

que chaque configuration de mesure \mathbf{x}_i soit dans l'espace de travail \mathcal{W} du manipulateur.

Afin de résoudre le problème d'optimisation décrit ci-dessus, il est nécessaire de recourir à un algorithme d'optimisation. Les auteurs proposent plusieurs méthodes de choix des configurations optimales, comme présentées en section 2.4.2.3. Par exemple, Daney utilise l'algorithme IOOPS [Dan00] afin de choisir de manière itérative les configurations de mesure. Cette méthode étant sensible au choix des configurations initiales, Daney *et al.* [Dan05] proposent de la coupler avec une méthode méta-heuristique afin d'améliorer les résultats. Nous proposons ici de traiter le problème directement avec un algorithme d'optimisation sous contrainte. Nous utiliserons la fonction *fmincon* de MATLAB permettant de résoudre

un problème d'optimisation sous contrainte. Différents algorithmes sont implantés dans cette fonction : *sqp*, *interior-point* et *active-set*. Étant donné que nous avons observé des résultats sensiblement identiques en utilisant l'un ou l'autre des algorithmes ci-dessus (ce qui ne garantit toutefois rien sur le caractère global du minimum), nous utiliserons l'algorithme *sqp* (sequential quadratic programming [Bog95]) pour deux raisons principales : c'est l'algorithme le plus rapide parmi les 3 proposés, et c'est l'algorithme qu'utilise Daney dans [Dan00]. Ainsi, l'efficacité de l'algorithme d'optimisation sous contrainte pourra être comparée à celle du IOOPS lors de l'exemple ci-dessous, reprenant toutes les étapes nécessaires à la réussite de l'étalonnage.

3.5 Exemple

Nous proposons d'illustrer les conditions nécessaires à l'étalonnage développées ci-dessus, la précision nécessaire $\Delta \xi^{\text{nec}}$ sur les paramètres et le bruit de mesure maximal admissible $\Delta \mathbf{m}^{\text{max}}$, sur un exemple simple : un mécanisme plan deux barres. Les configurations de mesure seront ensuite optimisées avec l'algorithme *sqp* implanté dans la fonction *fmincon* de MATLAB et les résultats seront comparés avec ceux obtenus par l'algorithme IOOPS pour résoudre le problème d'optimisation décrit en page 41.

Le mécanisme, présenté en figure 3.1, se compose de deux barres de longueurs l_1 et l_2 , actionnées par deux moteurs rotatifs réalisant un angle ρ_1 et ρ_2 par rapport à leurs positions d'origine respectives ρ_1^0 et ρ_2^0 .

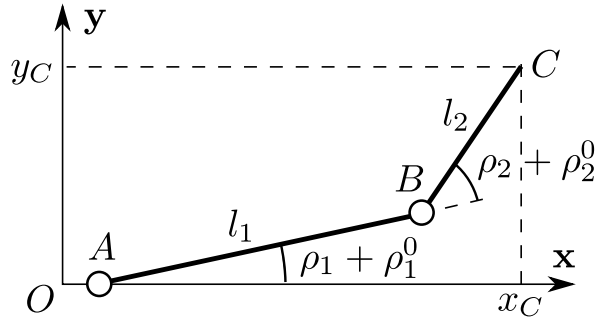


FIGURE 3.1 – Le mécanisme 2-barres considéré

L'objectif est de garantir une précision de positionnement statique $\Delta \mathbf{x}_f = [0.01\text{m}, 0.01\text{m}]^T$ pour la position du point C sur l'intégralité de l'espace de travail \mathcal{W} . L'espace de travail \mathcal{W} est tel que ρ_1 et $\rho_2 \in [-90^\circ; 90^\circ]$ et les valeurs nominales et réelles des paramètres du modèle $\xi = [x_A, y_A, l_1, l_2, \rho_1^0, \rho_2^0]^T$ sont données dans le tableau 3.1. Pour réaliser l'étalonnage, nous supposons que seule la position x_C^p du point C dans le repère de mesure $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ est mesurée, pour N_p configurations de mesure.

3.5.1 Calcul des précisions nécessaires sur les paramètres

En considérant le vecteur des positions mesurées des actionneurs $\boldsymbol{\rho}_p = [\rho_1^p, \rho_2^p]^T$ et la position de l'effecteur $\mathbf{x}_p = [x_C^p, y_C^p]^T$ de la pose p , le modèle géométrique exact du manipulateur

Valeurs nominales	Valeurs réelles
$x_A=0.1$ m	$x_A=0$ m
$y_A=0$ m	$y_A=0$ m
$l_1=1$ m	$l_1=0.99$ m
$l_2=0.5$ m	$l_2=0.45$ m
$\rho_1^0=0^\circ$	$\rho_1^0=1^\circ$
$\rho_2^0=0^\circ$	$\rho_2^0=-1^\circ$

TABLE 3.1 – Valeurs nominales et réelles des paramètres du modèle

peut être développé, avec $\alpha_1^p = \rho_1^p + \rho_1^0$, $\alpha_2^p = \alpha_1^p + \rho_2^p + \rho_2^0$, $s_\alpha = \sin(\alpha)$, and $c_\alpha = \cos(\alpha)$:

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} x_A + l_1 c_{\alpha_1^p} + l_2 c_{\alpha_2^p} - x_C^p \\ y_A + l_1 s_{\alpha_1^p} + l_2 s_{\alpha_2^p} - y_C^p \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Avec le modèle géométrique, les matrices jacobiennes $\hat{\mathbf{J}}_\rho^p$ et $\hat{\mathbf{J}}_\xi^p$ peuvent être obtenues :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}_\rho^p &= \hat{\mathbf{J}}_\rho(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_{\alpha_1^p} - l_2 s_{\alpha_2^p} & -l_2 s_{\alpha_2^p} \\ l_1 c_{\alpha_1^p} + l_2 c_{\alpha_2^p} & l_2 c_{\alpha_2^p} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{J}}_\xi^p &= \hat{\mathbf{J}}_\xi(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{\alpha_1^p} & c_{\alpha_2^p} & -l_1 s_{\alpha_1^p} - l_2 s_{\alpha_2^p} & -l_2 s_{\alpha_2^p} \\ 0 & 1 & s_{\alpha_1^p} & s_{\alpha_2^p} & l_1 c_{\alpha_1^p} + l_2 c_{\alpha_2^p} & l_2 c_{\alpha_2^p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Avec ces matrices et en notant $\Delta\boldsymbol{\rho} = [0.01^\circ, 0.01^\circ]^T$ la précision sur les actionneurs, la condition de (3.8) sur la précision nécessaire sur les paramètres du modèle qui garantissent la précision $\Delta\mathbf{x}_f$ sur \mathcal{W} peut être considérée :

$$\forall \mathbf{x}_p \in \mathcal{W}, \quad \text{abs}(\hat{\mathbf{J}}_\rho^p)\Delta\boldsymbol{\rho} + \text{abs}(\hat{\mathbf{J}}_\xi^p)\Delta\boldsymbol{\xi}^{\text{nec}} \leq \Delta\mathbf{x}_f \quad (3.30)$$

Comme nous l'avons précédemment constaté, il existe plusieurs jeux de précisions nécessaires $\Delta\boldsymbol{\xi}^{\text{nec}}$ qui peuvent garantir (3.30). Pour pouvoir effectuer un choix entre ces solutions, nous faisons l'hypothèse que tous les paramètres de même nature doivent avoir la même précision finale. C'est-à-dire que tous les paramètres de longueur $[x_A, y_A, l_1, l_2]^T$ doivent être connus avec la même précision Δx^{nec} , et tous les paramètres d'orientation $[\rho_1^0, \rho_2^0]^T$ avec la précision $\Delta\theta^{\text{nec}}$. Dans des conditions réelles, ce choix peut être effectué moins arbitrairement en considérant les tolérances de fabrication et d'assemblage des différents composants. Ainsi, garantir (3.30) revient à résoudre un système carré à deux équations pour deux inconnues Δx^{nec} et $\Delta\theta^{\text{nec}}$. En considérant le pire des cas sur l'espace de travail, ce système peut être écrit :

$$\max_{\mathcal{W}}(\text{abs}(\hat{\mathbf{J}}_\xi^p))\Delta\boldsymbol{\xi}^{\text{nec}} = \Delta\mathbf{x}_f - \max_{\mathcal{W}}(\text{abs}(\hat{\mathbf{J}}_\rho^p))\Delta\boldsymbol{\rho} \quad (3.31)$$

Cherchons tout d'abord à estimer le terme de droite, ce qui revient à borner $\max_{\mathcal{W}}(\text{abs}(\hat{\mathbf{J}}_\rho^p))$.

Grâce à la forme analytique de $\hat{\mathbf{J}}_\rho^p$, il est facile d'observer que :

$$\begin{aligned} \max_{\mathcal{W}}(\text{abs}(\begin{bmatrix} -l_1 s_{\alpha_1^p} - l_2 s_{\alpha_2^p} & -l_2 s_{\alpha_2^p} \end{bmatrix})) &= \begin{bmatrix} l_1 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \rho_1^p + \rho_1^0 = \frac{\pi}{2} \\ \rho_2^p + \rho_2^0 = 0 \end{cases} \\ \text{et} \quad \max_{\mathcal{W}}(\text{abs}(\begin{bmatrix} l_1 c_{\alpha_1^p} + l_2 c_{\alpha_2^p} & l_2 c_{\alpha_2^p} \end{bmatrix})) &= \begin{bmatrix} l_1 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \rho_1^p + \rho_1^0 = 0 \\ \rho_2^p + \rho_2^0 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ainsi, le terme de droite de (3.31) peut être estimé par :

$$\Delta \mathbf{x}_f - \max_{\mathcal{W}}(\text{abs}(\hat{\mathbf{J}}_\rho^p)) \Delta \boldsymbol{\rho} = \Delta \mathbf{x}_f - \begin{bmatrix} l_1 + l_2 & l_2 \\ l_1 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\rho} \quad (3.33)$$

En ce qui concerne le terme de gauche de (3.31), il n'existe pas de solution exacte sur l'espace de travail maximisant tous les termes de $\hat{\mathbf{J}}_\xi^p$. Nous utiliserons donc la définition de $\max_{\mathcal{W}}(\bullet)$ qui consiste à maximiser indépendamment tous les termes :

$$\max_{\mathcal{W}}(\text{abs}(\hat{\mathbf{J}}_\xi^p)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & l_1 + l_2 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & l_1 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Avec (3.33) et (3.34), le système (3.31) conduit alors à deux équations identiques :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & l_1 + l_2 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & l_1 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\xi}^{\text{nec}} = \Delta \mathbf{x}_f - \begin{bmatrix} l_1 + l_2 & l_2 \\ l_1 + l_2 & l_2 \end{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\rho} \quad (3.35)$$

$$\rightarrow 3\Delta x^{\text{nec}} + (l_1 + 2l_2)\Delta \theta^{\text{nec}} = \Delta x_f - (l_1 + 2l_2)\Delta \rho \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta x_f = 0.01\text{m} \\ \Delta \rho = 0.01^\circ \end{cases}$$

Dans le plan $(\Delta x, \Delta \theta)$ et en considérant les valeurs nominales de $l_1 = 1\text{m}$ et $l_2 = 0.5\text{m}$, (3.35) définit une droite qui sépare le plan en deux régions dont l'une contient tous les couples $(\Delta x, \Delta \theta)$ amenant à une précision au moins égale à $\Delta \mathbf{x}_f$ sur tout l'espace de travail (zone pointillée dans la figure 3.2).

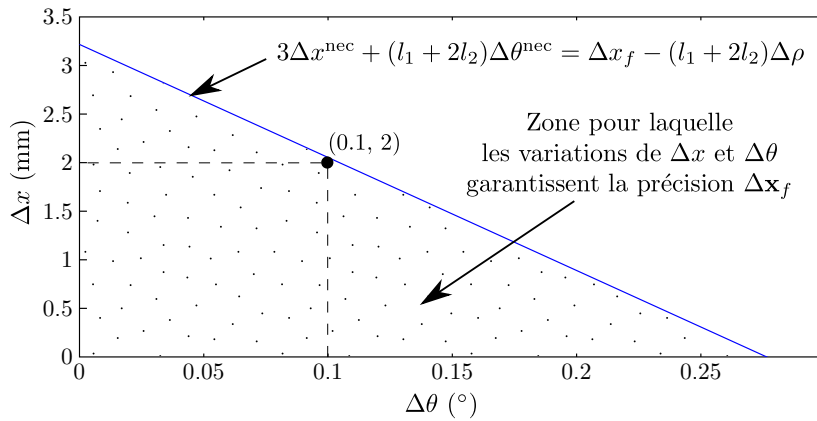


FIGURE 3.2 – Représentation graphique de la condition sur la variation des paramètres

Nous choisirons une solution située en frontière de la condition : $\Delta x^{\text{nec}} = 2\text{mm}$ et $\Delta \theta^{\text{nec}} = 0.1^\circ$, dans le but d'observer la validité de la condition sur la précision nécessaire des paramètres.

3.5.2 Calcul du bruit de mesure maximal admissible

Une fois les précisions nécessaires $\Delta \xi^{\text{nec}}$ sur les paramètres du modèle obtenues, le bruit maximal Δm^{max} sur les mesures additionnelles permettant de garantir une bonne qualité d'étalonnage doit être calculé. Pour ce faire, il faut considérer la fonction d'identification \mathbf{g}_p de la pose p . Pour l'exemple considéré, seule la position x_C^p du point C dans le repère de mesure $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ est mesurée, pour N_p configurations de mesure. Ainsi, la fonction d'identification \mathbf{g}_p peut être définie comme la première ligne du modèle géométrique \mathbf{f}^* :

$$g_p = x_A + l_1 c_{\alpha_1^p} + l_2 c_{\alpha_2^p} - x_C^p \quad (3.36)$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_m^p &= \mathbf{G}_m(\mathbf{m}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_\rho^p &= \mathbf{G}_\rho(\mathbf{m}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_{\alpha_1^p} - l_2 s_{\alpha_2^p} & -l_2 s_{\alpha_2^p} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_\xi^p &= \mathbf{G}_\xi(\mathbf{m}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{\alpha_1^p} & c_{\alpha_2^p} & -l_1 s_{\alpha_1^p} - l_2 s_{\alpha_2^p} & -l_2 s_{\alpha_2^p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

La première constatation à effectuer en observant la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ^p est que quelle que soit la pose p considérée, la colonne associée à la variation δy_A de l'ordonnée du point A dans le repère de mesure est toujours nulle. Ainsi, y_A est non-identifiable par définition et doit être retiré du jeu de paramètres à identifier $\boldsymbol{\xi}$. Ainsi, $\boldsymbol{\xi}' = [x_A, l_1, l_2, \rho_1^0, \rho_2^0]^T$ et

$$\mathbf{G}_{\xi'}^p = \begin{bmatrix} 1 & c_{\alpha_1^p} & c_{\alpha_2^p} & -l_1 s_{\alpha_1^p} - l_2 s_{\alpha_2^p} & -l_2 s_{\alpha_2^p} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

La condition à vérifier pour le bruit de mesure est :

$$\forall p = 1..N_p, \quad \text{abs}(\mathbf{G}_m^p) \Delta m^{\text{max}} + \text{abs}(\mathbf{G}_\rho^p) \begin{bmatrix} \Delta \rho \\ \Delta \rho \end{bmatrix} < \text{abs}(\mathbf{G}_{\xi'}^p) \begin{bmatrix} \Delta x^{\text{nec}} \\ \Delta x^{\text{nec}} \\ \Delta x^{\text{nec}} \\ \Delta \theta^{\text{nec}} \\ \Delta \theta^{\text{nec}} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

soit en considérant les matrices de (3.37) et les notations précédentes :

$$\begin{aligned} \forall p = 1..N_p, \quad \Delta m^{\text{max}} + (|l_1 s_{\alpha_1^p} + l_2 s_{\alpha_2^p}| + l_2 |s_{\alpha_2^p}|) \Delta \rho \\ < (1 + |c_{\alpha_1^p}| + |c_{\alpha_2^p}|) \Delta x^{\text{nec}} + (|l_1 s_{\alpha_1^p} + l_2 s_{\alpha_2^p}| + l_2 |s_{\alpha_2^p}|) \Delta \theta^{\text{nec}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Et donc :

$$\forall p = 1..N_p, \quad \Delta m^{\text{max}} < (1 + |c_{\alpha_1^p}| + |c_{\alpha_2^p}|) \Delta x^{\text{nec}} + (|l_1 s_{\alpha_1^p} + l_2 s_{\alpha_2^p}| + l_2 |s_{\alpha_2^p}|) (\Delta \theta^{\text{nec}} - \Delta \rho) \quad (3.41)$$

Étant donné que la condition de (3.41) ne dépend que de la position des actionneurs $\boldsymbol{\rho}_p = [\rho_1^p, \rho_2^p]^T$, il est possible pour l'exemple considéré de tracer les zones des valeurs limites pour le bruit de mesure admissible Δm sur l'espace de travail, comme le montre la figure 3.3.

Grâce à la figure 3.3, il est possible de constater que la précision des mesures doit au moins être de 5mm si les configurations de mesure couvrent l'intégralité de l'espace de travail. Cette

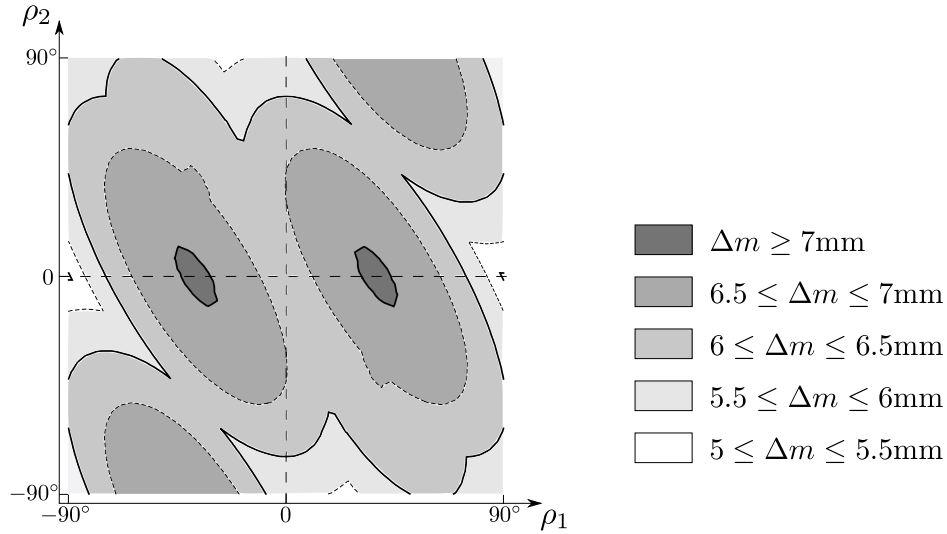


FIGURE 3.3 – Précision des mesures Δm dans l'espace articulaire pour obtenir une précision de positionnement au moins égale à $\Delta \mathbf{x}_f$ sur l'espace de travail

constatation est à mettre en parallèle avec la règle empirique qui stipule que les mesures doivent être au moins 10 fois plus précises que la précision recherchée [Pat00, Lub11], ce qui impliquerait une précision des mesures de 1mm dans notre cas. Nous pouvons aussi observer des zones pour lesquelles le bruit de mesure admissible peut être supérieur. Par exemple pour le centre de l'espace de travail, lorsque $\rho_1 = \rho_2 = 0^\circ$, la condition sur le bruit de mesure admissible est $\Delta m \leq 6\text{mm}$. En effet, lorsque $\rho_1 = \rho_2 = 0^\circ$, alors $s_{\alpha_1^p} = s_{\alpha_2^p} = 0$ et donc $(|l_1 s_{\alpha_1^p} + l_2 s_{\alpha_2^p}| + l_2 |s_{\alpha_2^p}|) = 0$. Ainsi, le terme de droite de (3.41) ne dépend que de Δx^{nec} , ce qui permet d'obtenir une condition moins forte sur le bruit de mesure. Cependant, il est facile de constater que pour cette configuration de mesure, les $\Delta \theta$ n'interviennent pas dans les équations d'étalonnage et donc ne sont pas identifiables. Ainsi, il est nécessaire d'optimiser les configurations de mesure afin d'améliorer l'identification de tous les paramètres du modèle.

3.5.3 Choix des configurations de mesure

Pour pouvoir procéder au choix des configurations de mesure, il est tout d'abord nécessaire de développer la matrice d'identification normalisée \mathbf{H}_ξ . Cette matrice dépend du résidu \mathbf{g}^{\min} de la fonction d'identification. Dans l'exemple considéré, ce résidu peut être estimé par $g^{\min} = \Delta m + (l_1 + 2l_2)\Delta \rho$. La matrice normalisée \mathbf{H}_ξ^p de la pose p peut alors s'écrire :

$$\mathbf{H}_\xi^p = \frac{1}{g^{\min}} \mathbf{G}_{\xi'}^p \text{diag}([\Delta x^{\text{nec}}, \Delta x^{\text{nec}}, \Delta x^{\text{nec}}, \Delta \theta^{\text{nec}}, \Delta \theta^{\text{nec}}]^T) \quad (3.42)$$

Pour l'exemple considéré, une seule mesure par pose est effectuée, soit $m = 1$, et 5 paramètres doivent être identifiés, soit $n_\xi = 5$. Ainsi, la matrice d'identification normalisée

\mathbf{H}_ξ peut s'écrire en fonction des N_p configurations de mesure :

$$\mathbf{H}_\xi = \sqrt{\frac{5}{N_p}} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\xi^1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_\xi^{N_p} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Afin de procéder au choix des configurations de mesure, le problème d'optimisation décrit en page 41 est considéré. Tout d'abord, l'algorithme *sqp* d'optimisation sous contrainte implanté dans la fonction *fmincon* de MATLAB est comparé à l'algorithme IOOPS proposé par Daney [Dan00].

Afin de réaliser la comparaison, un bruit de mesure $\Delta m = 1\text{mm}$ est considéré afin de garantir la qualité de l'étalonnage. L'efficacité des algorithmes est comparée en observant la précision finale obtenue après étalonnage sur la position de l'effecteur $\Delta \mathbf{x}_f = [\Delta x_C, \Delta y_C]^T$, pour différents nombres de configurations de mesure N_p . Pour chaque valeur de N_p considérée, les algorithmes sont utilisés pour trouver les N_p poses optimales sur l'espace de travail en considérant les valeurs nominales des paramètres. Pour chaque configuration, la mesure m_p de la position y_C du point C est obtenue avec le modèle géométrique exact \mathbf{f}^* et les valeurs réelles des paramètres, en considérant un bruit uniforme sur l'intervalle $[-\Delta \rho; \Delta \rho]$ sur le positionnement des actionneurs et un bruit de mesure Δm lui aussi uniformément réparti. Avec les paramètres identifiés, la précision finale $\Delta \mathbf{x}_f$ obtenue après étalonnage est calculée sur 200 poses de vérification aléatoirement réparties sur l'espace de travail, toujours en considérant l'incertitude sur le positionnement des actionneurs. Pour chaque valeur de N_p et chaque jeu de poses optimales, seules les erreurs maximales $\Delta \mathbf{x}_f^{\max} = [\Delta x_C^{\max}, \Delta y_C^{\max}]^T$ obtenues sur les 200 poses de vérification sont gardées. Ce processus est répété 100 fois pour chaque algorithme et chaque valeur de N_p . Les résultats sont donnés dans la figure 3.4 et le tableau 3.2 en terme d'erreur moyenne, maximale et minimale commise pour Δx_C^{\max} et Δy_C^{\max} .

N_p	6	7	8	10	12	15	20	25	30	35	40
minimum	0.54	0.49	0.36	0.42	0.43	0.41	0.31	0.31	0.26	0.27	0.31
maximum	2.10	1.75	1.61	1.37	1.44	1.30	1.11	0.99	0.87	0.84	0.82
moyenne	1.12	1.03	0.94	0.84	0.79	0.74	0.65	0.58	0.53	0.52	0.51
variance	0.31	0.28	0.24	0.21	0.19	0.19	0.16	0.15	0.13	0.11	0.11

(a) Avec l'algorithme IOOPS

N_p	6	7	8	10	12	15	20	25	30	35	40
minimum	0.45	0.45	0.47	0.37	0.33	0.34	0.32	0.29	0.27	0.27	0.27
maximum	1.74	1.42	1.68	1.41	1.30	1.27	1.07	1.04	0.85	0.79	0.93
moyenne	1.01	0.98	0.90	0.84	0.78	0.70	0.66	0.59	0.54	0.54	0.52
variance	0.26	0.20	0.22	0.23	0.19	0.18	0.18	0.15	0.13	0.12	0.12

(b) Avec l'algorithme sqp

TABLE 3.2 – Erreurs Δx_C^{\max} obtenues sur les poses de vérification après étalonnage (en mm)

La comparaison n'est pas effectuée en considérant N_p configurations de mesure aléatoirement réparties sur l'espace de travail puisque les erreurs obtenues dans ce cas sont bien supérieures aux erreurs obtenues en optimisant le choix des configurations de mesure et ne permettent donc pas une comparaison des deux algorithmes. Cependant, une comparaison

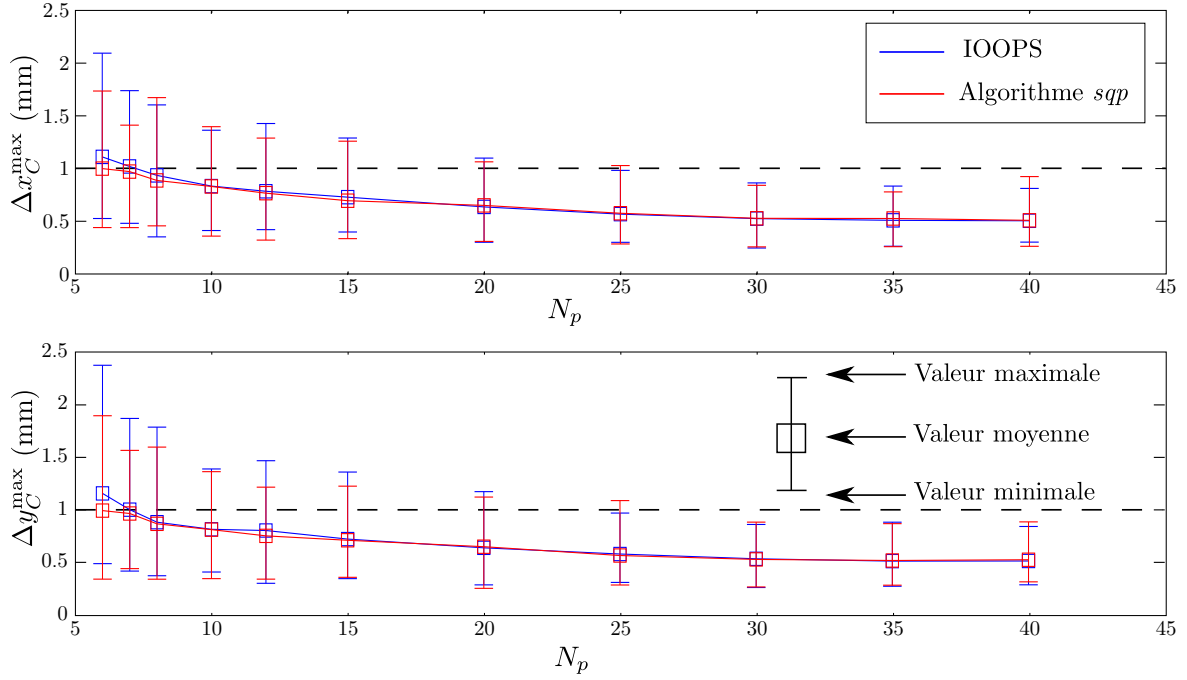


FIGURE 3.4 – Comparaison des erreurs maximales obtenues sur les poses de vérification après étalonnage en considérant deux algorithmes de choix de configurations de mesure

entre l'algorithme IOOPS et des configurations de mesure aléatoires peut être trouvée dans [Dan00].

L'analyse de la figure 3.4 montre que plus le nombre N_p de configurations de mesure considérées est grand, meilleure est la qualité de l'étalonnage. Ce phénomène a déjà été observé et expliqué dans [Mas97, Bes99, Dan05] et est vrai jusqu'à un certain nombre de configurations au-delà duquel aucune amélioration notable ne peut être observée, le seuil dépendant du bruit de mesure. Nous pouvons observer que l'algorithme *sqp* permet d'obtenir de meilleurs résultats en terme de précision après étalonnage, notamment pour un faible nombre de configurations de mesure. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que certaines configurations optimisées avec l'algorithme IOOPS tendent à rester au voisinage des configurations initiales. Daney *et al.* [Dan00] ont aussi observé ce phénomène qu'ils expliquent par la présence de nombreux minima locaux, et proposent l'utilisation de méthodes méta-heuristiques pour le choix des configurations initiales afin de lever cette problématique, méthodes qui n'ont pas été considérées dans cette thèse. Il est à noter qu'étant donné que 5 paramètres doivent être identifiés, avec une mesure par pose, le nombre minimal de configurations de mesure est $N_p = 6$. Au regard de la figure 3.4, nous choisirons donc de réaliser l'étalonnage sur $N_p = 10$ configurations de mesure optimisées grâce à l'algorithme *sqp* d'optimisation sous contrainte implanté dans la fonction *fmincon* de MATLAB afin de comparer l'influence du bruit de mesure sur les résultats d'étalonnage.

3.5.4 Analyse des résultats

Afin d'observer l'influence du bruit de mesure Δm sur la qualité de l'étalonnage et d'illustrer les conditions nécessaires à l'étalonnage développées dans ce chapitre, l'identification des 5 paramètres du modèle est réalisée avec un bruit de mesure Δm allant de 1 à 10mm, en considérant $N_p = 10$ configurations de mesure optimisées. Pour chaque valeur de Δm , l'étalonnage, ainsi que le choix des poses optimales, est réalisé 1000 fois. La précision finale sur la position du point C est calculée sur 400 poses de vérification aléatoirement réparties sur l'espace de travail, identiques pour tous les cas. Les résultats sont consignés dans le tableau 3.3 en terme d'erreurs maximales obtenues Δx_C^{\max} et Δy_C^{\max} dans le pire des cas (sur les 400 poses de vérification et les 1000 processus d'étalonnage). Le pourcentage de cas défectueux, c'est-à-dire les cas pour lesquels la précision est supérieure à la précision souhaitée de 10mm, est aussi indiqué. Enfin, la plus petite valeur singulière de la matrice d'identification \mathbf{H}_ξ , permettant de détecter les problèmes d'identifiabilité, est donnée sous forme de moyenne sur les 1000 processus d'étalonnage étant donné que ses bornes minimales et maximales sont proches dans tous les cas.

Δm (mm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δx_C^{\max} (mm)	1.5	3.1	4.5	5.6	6.8	8.3	11.3	11.0	12.7	13.7
Δy_C^{\max} (mm)	1.8	3.2	4.6	6.7	8.1	9.2	12.7	12.5	14.5	16.1
Cas défectueux (%)	0	0	0	0	0	0	0.4	3.0	10.6	21.1
$\overline{\sigma_L}(\mathbf{H}_\xi)$	0.9	0.5	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1

TABLE 3.3 – Statistiques des résultats obtenus après 1000 étalonnages pour 10 valeurs du bruit de mesure

L'analyse du tableau 3.3 montre évidemment que plus le bruit de mesure augmente, moins bonne est la précision finale obtenue. Le bruit de mesure maximal admissible permettant d'atteindre une précision $\Delta \mathbf{x}_f$ de 10mm sur l'espace de travail est de 6mm. Cette valeur est proche de la condition trouvée précédemment en considérant le pire des cas : $\Delta m \leq 5\text{mm}$. Ainsi, l'étalonnage est possible avec un bruit de mesure supérieur à la borne maximale calculée par la condition de (3.41). Cette condition considère le pire des cas qui n'est pas forcément atteint, c'est-à-dire lorsque les mesures sont bruitées au maximum et qu'elles ont le plus d'influence sur les résultats d'étalonnage. De plus, les configurations de mesure ont été optimisées, ce qui permet d'améliorer l'identifiabilité des paramètres pour le même bruit de mesure. Ainsi, bien que (3.41) ne soit qu'une condition nécessaire sur le bruit de mesure admissible, il semble que la borne obtenue puisse être considérée comme une condition suffisante à la réussite de l'étalonnage.

En ce qui concerne la plus petite valeur singulière σ_L de la matrice d'identification normalisée \mathbf{H}_ξ , la condition suffisante pour l'identifiabilité des paramètres est $\sigma_L \geq 1$. Cette condition est vérifiée puisque l'identification des paramètres est possible même pour des plus petites valeurs de la valeur singulière minimale ($\sigma_L = 0.2$ par exemple). Ainsi, cette condition semble surestimée mais peut tout de même servir d'indicateur, notamment lors d'une simulation préalable à l'étalonnage. En effet, l'espace de travail a pour l'instant été considéré dans son intégralité pour réaliser les mesures. En fonction du moyen de mesure mis en place, il est parfois possible de ne réaliser les mesures que sur une sous-partie de l'espace de travail. Le choix des configurations de mesure est alors plus limité pour leur optimisation, ce qui conduit

à une faible valeur de σ_L et donc à une faible identifiabilité des paramètres. Afin d'illustrer ce phénomène, nous considérons un bruit de mesure fixe $\Delta m = 5\text{mm}$ pour différents espaces de mesure $[\rho_1, \rho_2]$ allant de $\pm 90^\circ$ à $\pm 20^\circ$. La simulation est réalisée de la même façon que précédemment, toujours pour 1000 étalonnages et 400 poses de vérification. Les résultats sont consignés dans le tableau 3.4.

ρ_1, ρ_2	$\pm 90^\circ$	$\pm 80^\circ$	$\pm 70^\circ$	$\pm 60^\circ$	$\pm 50^\circ$	$\pm 40^\circ$	$\pm 30^\circ$	$\pm 20^\circ$
Δx_C^{\max} (mm)	7.4	7.5	9.0	11.6	17.9	28.9	156.8	1128.9
Δy_C^{\max} (mm)	7.8	8.9	11.5	14.3	18.8	34.4	132.1	962.8
Cas défectueux (%)	0	0	0.6	4.6	21.8	46.5	79.8	98.5
$\overline{\sigma_L}(\mathbf{H}_\xi)$	0.20	0.19	0.17	0.15	0.11	0.07	0.04	0.01

TABLE 3.4 – Statistiques des résultats obtenus après 1000 étalonnages pour 8 espaces de mesure

Le tableau 3.4 montre clairement l'influence de la généricité des mesures sur l'identifiabilité des paramètres : plus l'espace de travail utilisé pour réaliser les mesures est petit, moins les paramètres sont facilement identifiables et plus la qualité de l'étalonnage est dégradée. Ce phénomène est reflété par les faibles valeurs de σ_L . A partir d'un espace de mesure réduit à $\pm 30^\circ$, les erreurs obtenues après étalonnage sont très importantes : de 0.1 à plus d'1m. Ceci est dû au fait que les valeurs identifiées des paramètres du modèle sont loin de leur valeur nominale, à cause des problèmes d'identifiabilité comme expliqué en section 2.5.3. Ainsi, les problèmes d'identifiabilité des paramètres peuvent aussi être détectés en observant la distance entre les valeurs initiales et identifiées des paramètres du modèle : un paramètre dont la valeur est éloignée de sa valeur nominale, aux tolérances de fabrication près, risque d'être un paramètre peu ou pas identifiable. Cependant, ces constatations correspondent aussi aux effets des erreurs de modélisation sur les résultats d'étalonnage, jusqu'à présent non considérés.

3.6 Effet des erreurs de modélisation

En général, le modèle géométrique exact \mathbf{f}^* n'est pas connu et seulement une simplification de ce modèle en une fonction \mathbf{f} est disponible. Comme précédemment explicité en section 3.2.1, cette fonction est égale à un résidu ε_f^p , dépendant de la pose p , lorsque toutes les variables de \mathbf{f} sont connues exactement :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_p^*, \boldsymbol{\rho}_p^*, \boldsymbol{\xi}^*) = \varepsilon_f^p \quad (3.44)$$

Étant donné que la fonction d'identification \mathbf{g}_p de la pose p est fonction du modèle considéré, les erreurs de modèle sont donc répercutées sur le résidu ε_p de \mathbf{g}_p lorsque les mesures additionnelles \mathbf{m}_p^* , les mesures $\boldsymbol{\rho}_p^*$ de la position des actionneurs et les valeurs des paramètres du modèle $\boldsymbol{\xi}^*$ sont exactes :

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p^*, \boldsymbol{\rho}_p^*, \boldsymbol{\xi}^*) = \varepsilon_p \quad (3.45)$$

En considérant les erreurs $\delta \mathbf{m}_p^*$, $\delta \boldsymbol{\rho}_p^*$ et $\delta \boldsymbol{\xi}^*$, différencier \mathbf{g}_p par rapport à chacun de ses paramètres permet d'écrire, comme précédemment :

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi}) = \varepsilon_p - \mathbf{G}_m^p \delta \mathbf{m}_p^* - \mathbf{G}_\rho^p \delta \boldsymbol{\rho}_p^* - \mathbf{G}_\xi^p \delta \boldsymbol{\xi}^* \quad (3.46)$$

Les conditions sur la précision nécessaire des paramètres et sur le bruit de mesure maximal admissible permettent de négliger les influences de $\delta \mathbf{m}_p^*$ et $\delta \boldsymbol{\rho}_p^*$ devant $\mathbf{G}_\xi^p \delta \boldsymbol{\xi}^*$ dans (3.46). Cependant, dans le cas où les erreurs de modélisation sont importantes, ces conditions ne permettent pas de négliger $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ dans (3.46). Ainsi :

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{m}_p, \boldsymbol{\rho}_p, \boldsymbol{\xi}) \approx \boldsymbol{\varepsilon}_p - \mathbf{G}_\xi^p \delta \boldsymbol{\xi} \quad (3.47)$$

Les équations normales pour l'algorithme aux moindres carrés deviennent donc, avec $\boldsymbol{\varepsilon}_g = [\boldsymbol{\varepsilon}_1^T \dots \boldsymbol{\varepsilon}_{N_p}^T]^T$:

$$(\mathbf{g}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\varepsilon}_g) = -\mathbf{G}_\xi \delta \boldsymbol{\xi} \quad (3.48)$$

Ainsi, la minimisation aux moindres carrés ne revient plus à minimiser $\mathbf{g}^T \mathbf{g}$ mais $(\mathbf{g} - \boldsymbol{\varepsilon}_g)^T (\mathbf{g} - \boldsymbol{\varepsilon}_g)$, ce qui conduit à des corrections $\delta \boldsymbol{\xi}$ à apporter sur les valeurs des paramètres prenant implicitement en compte les erreurs de modèle $\boldsymbol{\varepsilon}_g$. Dans certains cas, cela peut donc conduire à des valeurs identifiées des paramètres du modèle éloignées de leur valeur nominale. Ainsi, le fait d'obtenir des valeurs identifiées des paramètres éloignées de leur valeur nominale après étalonnage peut être dû soit à une mauvaise identifiabilité des paramètres, soit aux erreurs de modèle. Une différence est cependant notable : retirer un paramètre pas ou peu identifiable du jeu de paramètres à identifier améliore, ou en tout cas ne détériore pas la qualité de l'étalonnage, tandis que cette constatation est erronée dans le cas d'erreur de modèle. Nous observerons expérimentalement ce phénomène lors de l'étalonnage d'un télescope d'observation actif dans le chapitre 5.

3.7 Conclusion

Par une analyse des équations utilisées lors de l'étalonnage, il est donc possible de définir des conditions nécessaires à la réussite de l'étalonnage : la précision nécessaire sur les paramètres du modèle, le bruit de mesure maximale admissible pour l'identification des paramètres, le critère d'arrêt pour les algorithmes de minimisation. Ces conditions ont été illustrées et discutées dans l'exemple du mécanisme 2 barres développé. Même si ces conditions ne sont que nécessaires, et non suffisantes pour garantir la qualité de l'étalonnage, celles-ci procurent tout de même des bornes très proches des conditions suffisantes pour l'exemple considéré. Ainsi, les conditions obtenues peuvent être utilement considérées afin de garantir la qualité d'étalonnage souhaitée, notamment pour le bruit de mesure admissible.

En ce qui concerne la borne de 1 sur la plus petite valeur singulière de la matrice d'identification normalisée \mathbf{H}_ξ , celle-ci semble quant à elle surestimée. Cette surestimation provient du fait que la borne de 1 a été développée en considérant le pire des cas lors de l'étalonnage. Il peut cependant être intéressant d'observer la variation de cette valeur singulière lors de simulations préalables à l'étalonnage pour définir l'espace de mesure nécessaire par exemple. De plus, la détermination des paramètres peu ou pas identifiables peut aussi être réalisée par une analyse après étalonnage de la distance entre les valeurs nominales et les valeurs identifiées des paramètres. Cependant, ce phénomène peut aussi refléter des erreurs de modélisation.

Dans la suite de ce document, nous verrons que ces conditions sont utiles pour l'étalonnage expérimental d'un télescope d'observation spatial actif. L'architecture du télescope utilise des liaisons flexibles et la phase de modélisation nécessite donc une attention toute particulière.

Cependant, l'influence des sources d'erreurs sur la précision finale de la structure n'a pas été étudiée pour cette architecture spécifique utilisant des liaisons flexibles. Ainsi, les principales sources d'erreurs à prendre en considération lors de l'étape de modélisation ne sont pas connues. Grâce à l'analyse de l'effet des erreurs de modélisation sur les résultats d'étalonnage, nous verrons qu'il est possible d'effectuer un choix du modèle par une analyse judicieuse des résultats d'étalonnage.

Modélisation du télescope d'observation spatial actif

Résumé : Un télescope d'observation spatial actif, avec une architecture robotique parallèle, a été développé préalablement à cette thèse afin de pouvoir améliorer la qualité des images émises depuis l'espace. Pour que le télescope soit compatible avec l'environnement spatial, des liaisons flexibles sont utilisées en lieu et place des articulations habituelles. Les liaisons flexibles présentent l'avantage de ne pas générer de jeu et ne nécessitent pas de lubrification. Cependant, leur comportement cinématique doit être correctement modélisé pour que la précision de positionnement du télescope requise pour améliorer la qualité des images générées puisse être atteinte. Plusieurs modèles de comportement des articulations flexibles sont proposés : un modèle rotule, un modèle qui repose sur les équations de la théorie des poutres, ainsi qu'un modèle de raideur. Une première campagne de mesure a aussi mis en évidence une déformation de la plate-forme mobile du télescope qui peut être prise en compte par l'intermédiaire de deux modèles, *couplé* ou *découplé*.

Sommaire

4.1	Introduction	53
4.2	Spécifications du télescope	55
4.3	Architecture utilisée	56
4.4	Modélisation de la déformation de la plate-forme mobile	58
4.4.1	Analyse des données photogrammétriques	58
4.4.2	Modèle découplé	61
4.4.3	Modèle couplé	63
4.5	Modélisation des articulations flexibles	64
4.5.1	Modèles géométriques du 6-PUS	65
4.5.2	Modèle cinématique du 6-PUS	66
4.5.3	Modèle poutre pour les articulations flexibles	67
4.5.4	Modèle de raideur	71
4.6	Conclusion	75

4.1 Introduction

Un télescope d'observation spatial permet d'obtenir des images dans l'espace. Comme le montre la figure 4.1, l'image de l'objet observé est successivement reflétée par deux miroirs

avant d'être captée par la caméra. La qualité des images générées dépend donc de la qualité de positionnement relatif des deux miroirs du télescope. Afin d'améliorer la qualité des images, il est possible de modifier le positionnement relatif des miroirs à l'aide d'actionneurs. On parle alors de télescope actif.

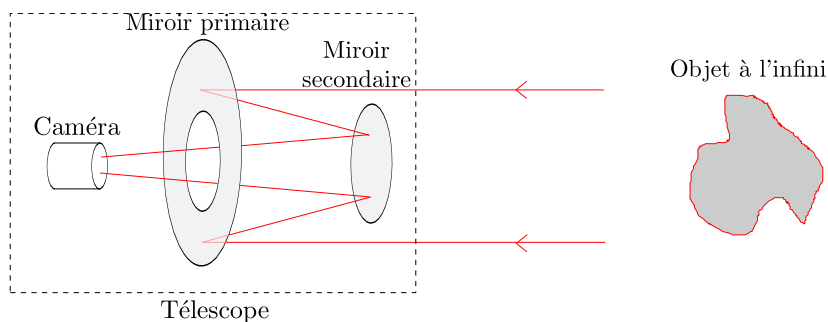


FIGURE 4.1 – *Principe de fonctionnement d'un télescope d'observation spatial*

Un exemple de télescope actif connu est le James Webb Space Telescope (JWST) [Gar06] développé par la NASA. Ce télescope de grande dimension, présenté en figure 4.2, est censé succéder au télescope Hubble en 2018. Le miroir primaire du JWST devrait faire 6.5m de diamètre. Étant donné que la fabrication d'un miroir de telle dimension ayant les qualités optiques requises est difficile et coûteuse, le miroir primaire du JWST est en réalité constitué de 18 éléments de réflexion hexagonaux, comme le montre la figure 4.2. Cette fragmentation du miroir primaire en autorise aussi son repli, permettant alors au télescope de pouvoir être contenu dans le nez d'une fusée pour la mise sur orbite. Afin d'assurer la qualité de positionnement de chaque élément les uns par rapport aux autres, chaque élément hexagonal peut être contrôlé suivant 7 degrés de liberté (6 pour le positionnement, et 1 pour le rayon de courbure).

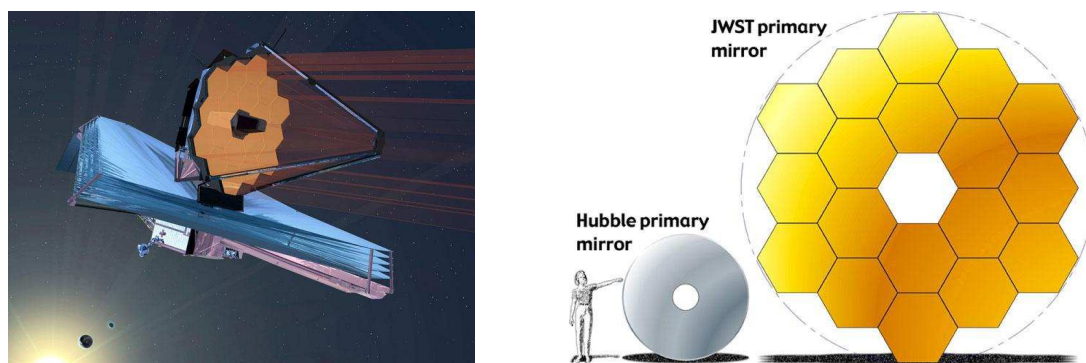


FIGURE 4.2 – *Architecture et dimensions du JWST, © NASA*

Le JWST est un télescope d'observation spatial à part puisque l'importante dimension de ses miroirs permet l'observation dans l'infrarouge, et donc l'étude de la formation et de l'évolution des étoiles lointaines et des galaxies par exemple. Ces tâches complexes ne sont pas requises pour l'immense majorité des télescopes d'observation spatiaux, pour lesquels une

observation de la lumière visible suffit. Ainsi, les miroirs sont souvent de plus petite dimension et peuvent être fabriqués en un seul tenant. La structure du JWST, avec ses 132 degrés de liberté, est donc bien trop complexe et coûteuse pour la majorité des télescopes d'observation spatiaux actifs. Nous étudions une nouvelle architecture pour un télescope d'observation spatial actif, visible en figure 4.3.

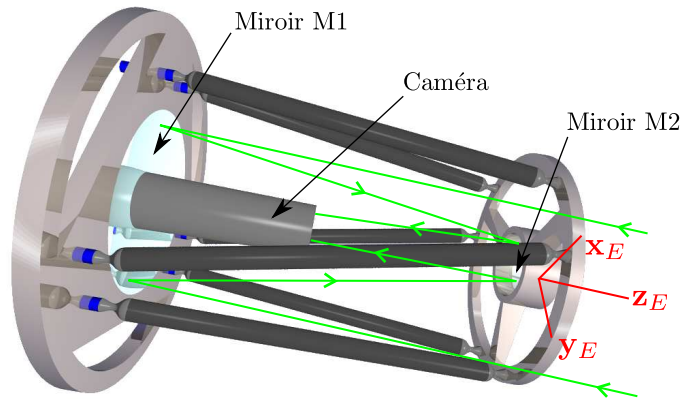


FIGURE 4.3 – *Le télescope d'observation spatial actif*

La partie avant du télescope est constituée d'une caméra et de deux miroirs : les miroirs primaire (M1) et secondaire (M2). L'image de l'objet vu par le télescope est d'abord reflétée par les deux miroirs avant d'être captée par la caméra, comme le montre la figure 4.3. La structure du télescope repose sur une architecture de robot parallèle à 6 degrés de liberté, présentée en section 4.3, qui permet de positionner précisément l'un des miroirs par rapport à l'autre. Afin que le télescope soit compatible avec les conditions spatiales, son architecture utilise des liaisons flexibles en lieu et place des articulations habituelles. Cependant, l'utilisation de liaisons flexibles influence le comportement cinématique du télescope. Il est alors nécessaire d'obtenir une modélisation correcte du télescope afin de satisfaire les spécifications requises en terme de qualité de positionnement relatif des deux miroirs. Dans ce chapitre, plusieurs modèles sont proposés pour les liaisons flexibles : un modèle rotule, un modèle qui repose sur les équations de la théorie des poutres, et un modèle de raideur. De plus, une source importante d'erreur a aussi pu être identifiée grâce à une première campagne de mesure de photogrammétrie : la déformation de la plate-forme mobile, qui sera quant à elle modélisée en section 4.4.

4.2 Spécifications du télescope

La qualité de l'image obtenue dépend fortement de la qualité de positionnement relatif du miroir secondaire par rapport au miroir primaire. Afin d'obtenir la qualité image nécessaire, le télescope doit pouvoir répondre aux spécifications du tableau 4.1, données en terme d'espace de travail et de précision à atteindre. Les spécifications ne considèrent pas la rotation θ_z du miroir secondaire suivant l'axe \mathbf{z}_E puisque cette rotation a une influence mineure sur la

qualité des images générées grâce à la sphéricité des miroirs.

	x (mm)	y (mm)	z (mm)	θ_x (°)	θ_y (°)
Espace de travail	2	2	0.2	1	1
Précision nécessaire	0.1	0.1	0.01	0.05	0.05

TABLE 4.1 – *Spécifications du télescope*

Les spécifications du tableau 4.1 sont liées au démonstrateur développé par Thales Alenia Space et les précisions voulues peuvent être plus contraignantes pour un télescope classique. Les spécifications imposent d'atteindre une précision élevée, mais sur un faible espace de travail. Ces critères correspondent parfaitement aux spécificités des robots parallèles. Ainsi, une architecture robotique parallèle a été considérée afin d'assurer le positionnement du miroir secondaire par rapport au miroir primaire. L'architecture utilisée est décrite dans la section suivante.

4.3 Architecture utilisée

La structure du télescope est une architecture robotique de type poignet actif développée par Merlet [Mer91a] et présentée en figure 4.4. Le télescope est donc un manipulateur de type 6-PUS, où P, U et S désignent respectivement les articulations prismatique (glissière), universelle (joint de cardan) et sphérique (rotule).

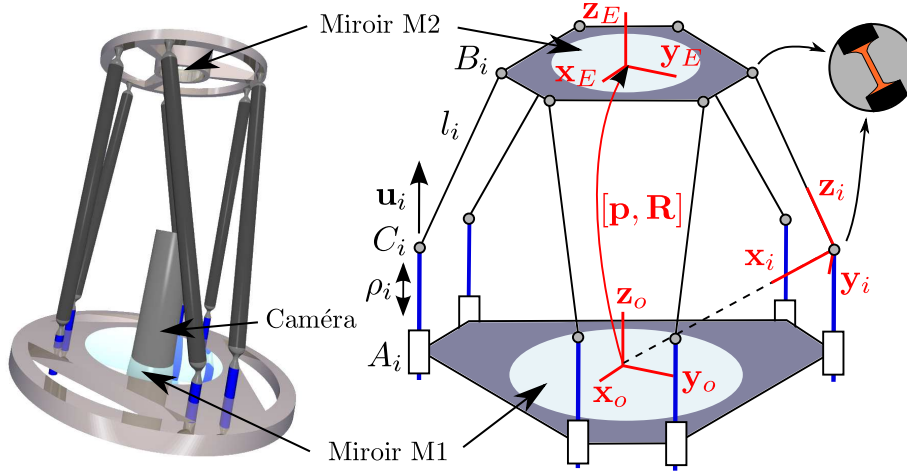


FIGURE 4.4 – *Architecture cinématique du télescope*

Le repère $\mathcal{F}_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o)$ est associé à la base du télescope, et le repère $\mathcal{F}_E = (\mathbf{x}_E, \mathbf{y}_E, \mathbf{z}_E)$ à la plate-forme mobile. Le vecteur de position \mathbf{p} et la matrice de rotation \mathbf{R} décrivent la position et l'orientation de la plate-forme mobile, donc du miroir secondaire, dans le repère \mathcal{F}_o associé à la base sur laquelle est fixé le miroir primaire.

Les deux miroirs sont reliés entre eux par l'intermédiaire de 6 segments de longueurs fixes $l_i \approx 0.5$ m, avec $i = 1 \dots 6$. Chaque jambe i est reliée à la plate-forme mobile par une rotule en

B_i et un joint de cardan en C_i . Les coordonnées du point B_i sont exprimées dans le repère \mathcal{F}_E de la plate-forme mobile et sont consignées dans le vecteur \mathbf{b}_i . La position de chaque point C_i est contrôlée par une liaison prismatique actionnée de longueur ρ_i et d'orientation \mathbf{u}_i , telles que $\overrightarrow{A_i C_i} = \rho_i \mathbf{u}_i$. Les coordonnées du point C_i sont toujours exprimées dans le repère de la base \mathcal{F}_o telles que $\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i + \rho_i \mathbf{u}_i$, avec \mathbf{a}_i un vecteur dont les composantes sont les coordonnées du point d'attache à la base A_i . À chaque jambe i est associé un repère $\mathcal{F}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$, où \mathbf{z}_i est la direction principale de la jambe et \mathbf{x}_i est tel que \mathbf{z}_o appartienne au plan $(C_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$.

La pose initiale \mathbf{X}^0 est définie comme la position \mathbf{p}^0 et l'orientation \mathbf{R}^0 de la plate-forme mobile pour lesquelles les actionneurs sont à leur position initiale de référence ρ_i^0 située à mi-chemin de leur course totale. Dans cette pose, l'orientation du repère de la i^{eme} jambe \mathcal{F}_i par rapport au repère de la base \mathcal{F}_o est définie par la matrice de rotation $\mathbf{R}_i^0 = [\mathbf{x}_i^0 \ \mathbf{y}_i^0 \ \mathbf{z}_i^0]$.

Les géométries de la base et de la plate-forme mobile sont décrites en figure 4.5 en fonction des paramètres de conception α_0 , r_0 , α_E et r_E , dont les valeurs nominales ne peuvent être données pour des raisons de confidentialité.

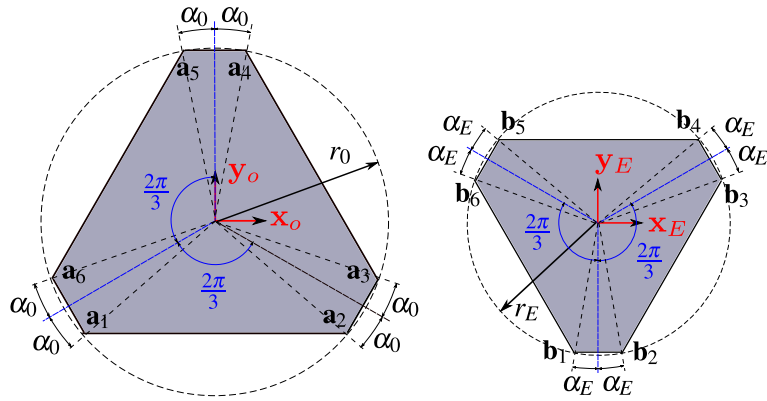


FIGURE 4.5 – Géométries de la base et de la plate-forme mobile

Afin que le télescope respecte les spécifications du tableau 4.1, les courses des actionneurs sont fixées à $\rho_i^0 \pm 1.3\text{mm}$. Les actionneurs retenus ont une précision $\Delta\rho_i = 1\mu\text{m}$. En considérant un manipulateur 6-PUS idéal avec les dimensions nominales et les spécifications des actionneurs ci-dessus, une erreur $\Delta\mathbf{x}_f$ de $6\mu\text{m}$ en position et 10^{-3}° en orientation a été calculée dans le pire des cas sur l'espace de travail \mathcal{W} . Ainsi, il est possible d'atteindre la précision souhaitée avec les tolérances spécifiées des actionneurs, tout du moins si les paramètres du modèle sont connus parfaitement et si le télescope se comporte comme un 6-PUS.

Cependant, le télescope ne se comporte pas comme un manipulateur 6-PUS idéal puisque les articulations universelles et sphériques sont remplacées par des liaisons flexibles. Les articulations flexibles présentent l'avantage de ne générer ni jeu ni frottement, permettent d'améliorer la répétabilité du télescope, et sont compatibles avec l'environnement spatial [Hen03]. Ainsi les articulations U et S sont remplacées par des articulations flexibles à filet circulaire [Che11], comme le montre la figure 4.4. Les articulations flexibles présentent cependant deux inconvénients majeurs qui peuvent détériorer la précision finale s'ils ne sont pas pris en considération : elles génèrent des efforts sur les autres pièces de la structure qui peuvent

se déformer, et leur centre de rotation varie en fonction de leur mouvement [Zel09]. Il est donc nécessaire d’étudier l’influence des articulations flexibles sur la précision finale du télescope. Ceci peut être effectué en considérant différents modèles de comportement possibles des articulations flexibles et en observant l’effet de ces comportements sur la précision.

Nous nous intéresserons tout d’abord à l’effet des efforts générés par les articulations flexibles sur la structure du télescope. Une première campagne de mesure de photogrammétrie sur le prototype du télescope a permis de mettre en évidence une déformation de sa plate-forme mobile. Étant donné que le télescope ne manipule qu’un poids très faible, cette déformation semble due aux efforts internes générés par les articulations flexibles. Deux modèles sont développés en section 4.4 afin de modéliser cette déformation. Dans un second temps, le comportement géométrique des articulations flexibles sera considéré en section 4.5.

4.4 Modélisation de la déformation de la plate-forme mobile

Les articulations flexibles ont été conçues et fabriquées de manière à ce que les efforts générés ne déforment pas, ou peu, les autres pièces de la structure robotique du télescope. Ainsi une déformation de la plate-forme mobile d’au maximum $4\mu\text{m}$ a été calculée sur l’intégralité de l’espace de travail par simulation avec un logiciel éléments finis. Cependant, les articulations flexibles doivent aussi pouvoir supporter les efforts dus au décollage lors de la mise sur orbite : celles-ci ont donc été conçues avec une raideur importante. Ainsi, une faible erreur de fabrication ou d’assemblage de la structure peut précharger les articulations flexibles et générer des efforts plus importants que ceux étudiés lors de la simulation. Il est donc nécessaire de s’assurer physiquement que toutes les pièces de la structure du télescope peuvent être considérées comme des éléments rigides lors de son fonctionnement, c’est-à-dire sur l’intégralité de son espace de travail.

Afin d’étudier la possible déformation des pièces de la structure robotique du télescope, une campagne de photogrammétrie a été effectuée. La photogrammétrie a été choisie comme moyen de mesure puisqu’elle permet l’obtention de mesures précises (déviations standard de $3\mu\text{m}$) sur un grand nombre de points. Les 40 configurations de mesure sont les mêmes que celles utilisées pour l’étalonnage par photogrammétrie et sont définies dans le chapitre 5. Comme le montre la figure 4.6, la photogrammétrie consiste à mesurer la position de pastilles photogrammétriques collées à la structure à partir de photos. Cependant, la position mesurée de chaque pastille dans le repère de mesure est soumise à un bruit. Il est donc nécessaire de recourir à une méthode robuste pour reconstituer la pose des éléments du télescope à partir des nuages de points bruités, méthode que nous présenterons dans la section suivante. L’analyse des données montrera que tous les éléments peuvent être considérés rigides, hormis la plate-forme mobile.

4.4.1 Analyse des données photogrammétriques

Afin d’extraire la position et l’orientation de chaque élément rigide composant le télescope à partir des données de photogrammétrie, nous utiliserons l’algorithme proposé par Haralick *et al.* [Har89]. Cet algorithme donne accès au déplacement du nuage de points considéré

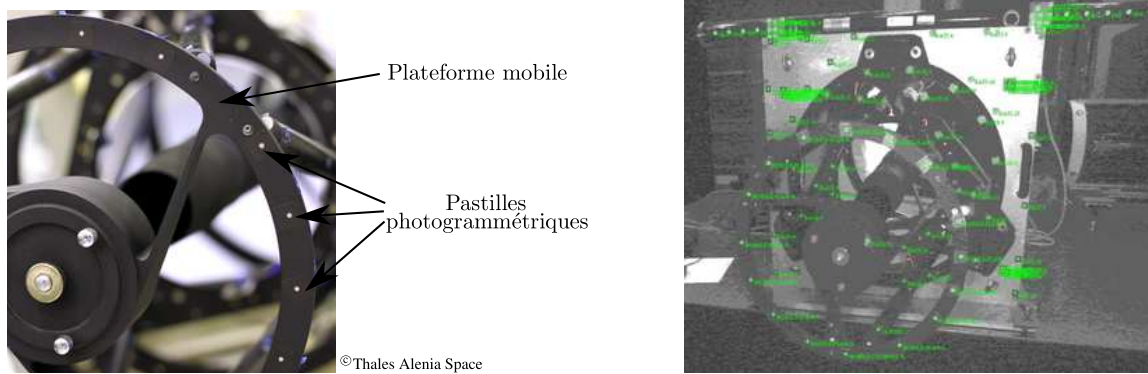


FIGURE 4.6 – Photos de la plate-forme mobile et des données de photogrammétrie

entre deux poses, avec un bruit de mesure sur chaque pose. Les détails sur la structure de l'algorithme utilisé peuvent être trouvés dans [Har89].

Nous proposons d'étudier l'influence du bruit de mesure sur les pastilles de photogrammétrie sur les résultats d'estimation de la pose du nuage de points considéré. Pour cela, nous simulerons les données photogrammétriques obtenues sur les jambes du télescope, c'est-à-dire en considérant un cylindre parfait de faible diamètre par rapport à sa longueur. Il est à noter que l'algorithme proposé par Haralick *et al.* ne considère qu'une distribution Gaussienne de variance σ pour le bruit de mesure. Cependant, des simulations avec un bruit uniformément réparti sur l'intervalle $[-2\sigma; 2\sigma]$ donnent les mêmes résultats.

Afin d'étudier l'influence du bruit de mesure sur les résultats de l'algorithme proposé par Haralick, un nuage de points parfait est d'abord généré pour une position initiale \mathcal{P}_0 du cylindre. Toutes les pastilles générées appartiennent à un cylindre de longueur 50cm et de rayon 1cm. La façon dont sont réparties les pastilles n'a pas ou peu d'influence sur les résultats de simulation. Chaque nuage de points est ensuite déplacé en une pose \mathcal{P} , et un bruit de mesure est ajouté pour chaque pastille. Le bruit de mesure suit une distribution normale de variance $\sigma = 3\mu\text{m}$, similaire au bruit des mesures photogrammétriques. L'algorithme proposé par Haralick est ensuite utilisé pour retrouver le déplacement de la pose \mathcal{P}_0 à la pose \mathcal{P} à partir des deux nuages de points bruités. Les simulations sont réalisées pour un nombre de pastilles allant de 9 à 24. Pour chaque nombre de pastilles considérées, le processus est répété 100 fois. Les résultats sont donnés en terme d'erreur moyenne en figure 4.7, la taille des barres représentant la variance des résultats. L'erreur en position correspond à la distance entre les positions réelle et calculée du cylindre. L'erreur en orientation est l'angle formé par les repères réel et calculé du cylindre, en utilisant la paramétrisation axe-angle pour décrire la rotation.

La figure 4.7 montre que l'algorithme proposé par Haralick *et al.* est robuste aux erreurs de mesure sur les pastilles. En effet, la précision obtenue sur l'estimation de la position et de l'orientation est du même ordre de grandeur que la précision des mesures : de l'ordre de 10^{-6}m pour la position et 5.10^{-5} radian (soit 10^{-3}°) pour l'orientation. De plus, l'algorithme ne requiert aucune connaissance ou hypothèse sur la géométrie des éléments rigides dont sont issus les nuages de pastilles. Ainsi, l'ensemble des données issues de la photogrammétrie seront traitées avec l'algorithme de Haralick dans la suite de ce document.

Pour les 40 configurations de mesure réalisées, les données de photogrammétrie sont ana-

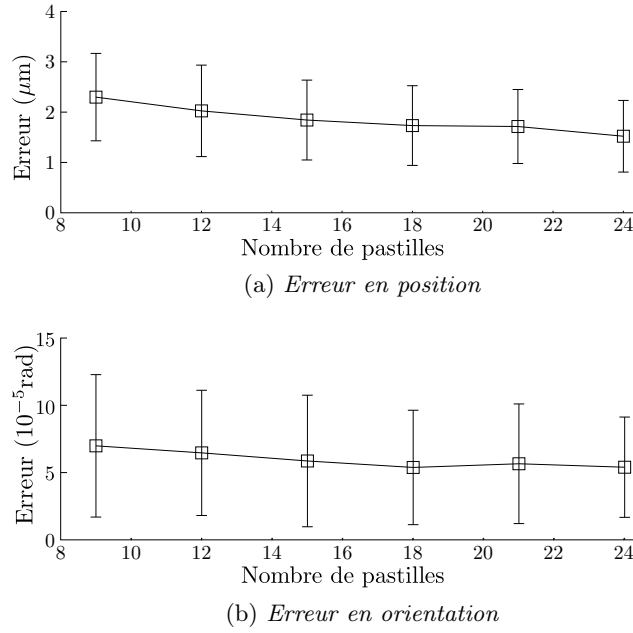


FIGURE 4.7 – Résultats de simulation pour la méthode proposée par Haralick

lysées grâce à l’algorithme de Haralick : le déplacement de chaque nuage de points issu d’un élément rigide est calculé. L’analyse des résultats montre que tous les éléments de la structure du télescope peuvent être considérés rigides, hormis la plate-forme mobile pour laquelle une déformation d’une dizaine de micromètres, donc supérieure au bruit de mesure, est observée. La figure 4.8 illustre la déformation de l’anneau de la plate-forme mobile sur lequel sont attachées les jambes. L’anneau déformé ressemble à une roue voilée pour la majorité des configurations de mesure.

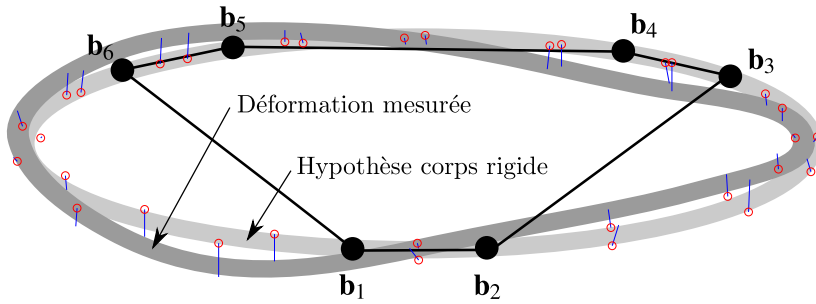


FIGURE 4.8 – Déformation mesurée de la plate-forme mobile pour une configuration de mesure. Les lignes bleues représentent l’erreur amplifiée entre la position mesurée des pastilles et leur position estimée dans le cas de corps rigide (cercle rouge).

Étant donné que les déformations mesurées sont du même ordre de grandeur que la précision de positionnement de $10\mu\text{m}$ à obtenir, il est nécessaire de modéliser cette source d’erreur afin de pouvoir la prendre en compte dans le modèle du télescope. Une analyse plus fine des résultats montre que les déformations impactent principalement la position b_i^z des points B_i , avec b_i^z la coordonnée suivant \mathbf{z}_E du point B_i dans le repère \mathcal{F}_E de la plate-

forme mobile. En effet, grâce à la structure en étoile de la plate-forme mobile, aussi appelée araignée et visible en figure 4.9, les déformations n'impactent pas le positionnement du miroir secondaire par rapport au miroir primaire mais uniquement la position des points d'attache B_i dans le repère de la plate-forme mobile. Afin de prendre en compte ces déplacements dans le modèle du télescope, deux modèles sont proposés ci-dessous.

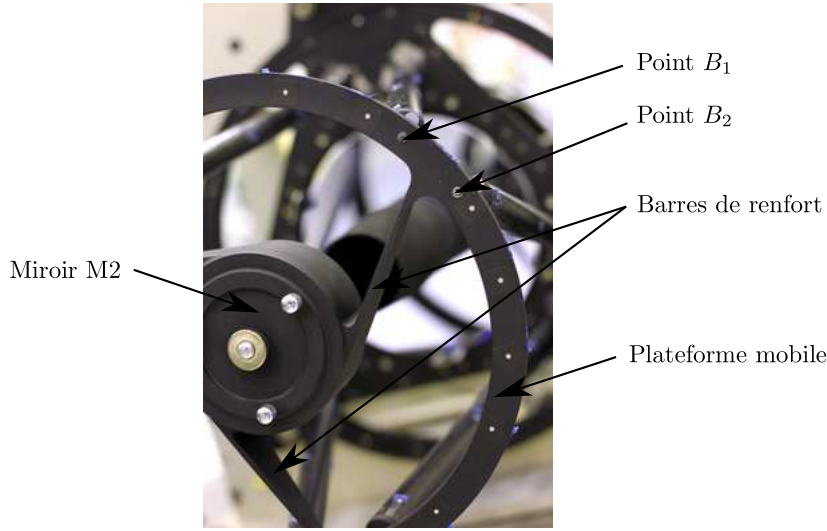


FIGURE 4.9 – Photo de la plate-forme mobile et de sa structure en étoile

4.4.2 Modèle découplé

Dans un premier temps, nous faisons l'hypothèse que le déplacement du point B_i n'est fonction que du déplacement du i^{eme} actionneur, c'est-à-dire que les déplacements des autres actionneurs n'ont pas d'effet sur le déplacement du point B_i . Les poses pour lesquelles la position des pastilles est mesurée sont aussi les poses qui serviront à l'étalonnage du télescope et sont données dans le chapitre 5. Pour ces poses, les actionneurs sont soit à leur position nominale de référence ρ_i^0 , soit à leur course maximale ou minimale. Pour des raisons expérimentales, aucune pastille photogrammétrique n'est positionnée aux endroits exacts des points B_i comme le montre la figure 4.8. Les déplacements Δb_i^z du point B_i sont donc extraits par interpolation linéaire avec les déplacements des deux pastilles les plus proches, ce qui augmente l'incertitude de la mesure. Pour chaque $i = 1..6$, les déplacements mesurés Δb_i^z du point B_i sont tracés en fonction du déplacement $\rho_i - \rho_i^0$ du i^{eme} actionneur par rapport à sa position initiale en figure 4.10. Les résultats sont donnés en terme de moyenne et de variance des déplacements mesurés Δb_i^z lorsque le i^{eme} actionneur est en butée minimale, en position de référence, et en butée maximale (seules positions mesurées).

Sur la figure 4.10, nous pouvons observer que les déplacements mesurés Δb_i^z du point B_i semblent dépendre linéairement du déplacement du i^{eme} actionneur par rapport à sa position initiale ρ_i^0 , sauf pour les jambes 1 et 5. Afin d'augmenter le nombre d'informations disponibles, nous superposons en figure 4.11 les 6 graphiques de la figure 4.10. Dans un souci de lisibilité, seules les moyennes des déplacements mesurés Δb_i^z sont tracées dans la figure 4.11.

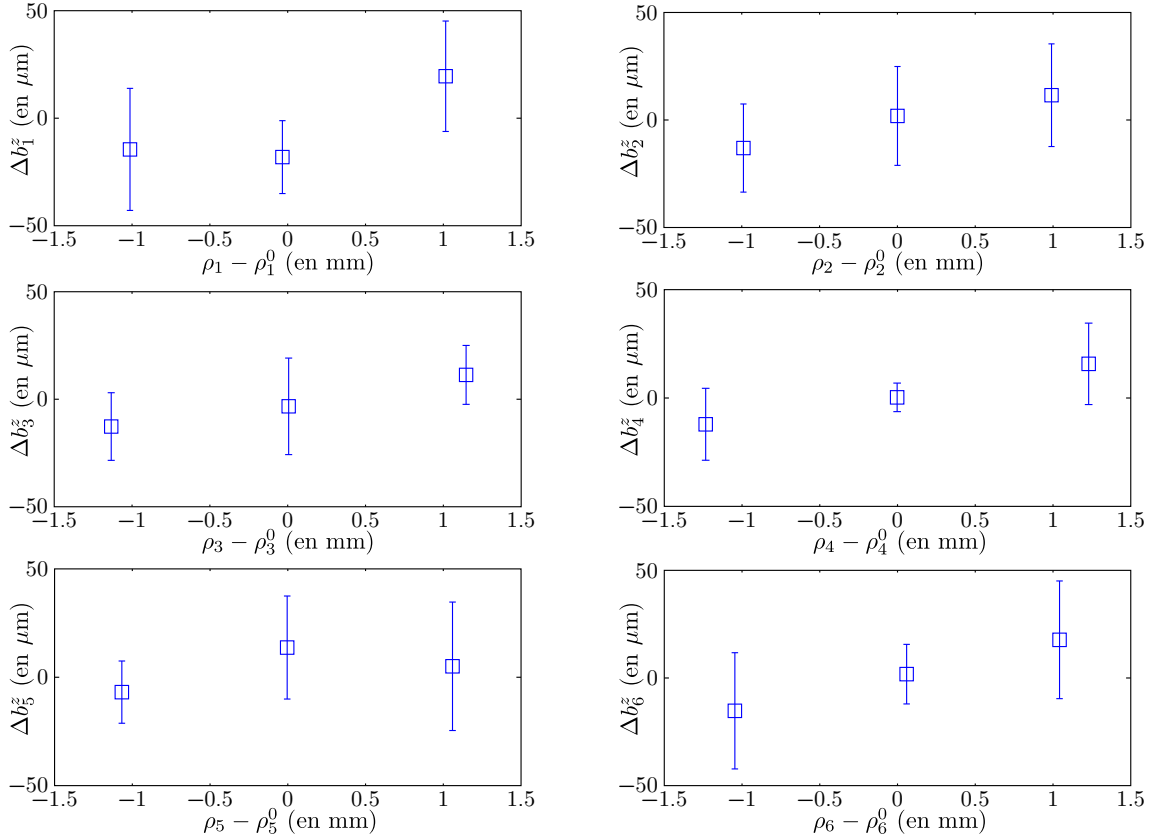


FIGURE 4.10 – Moyenne et variance des erreurs sur la position b_i^z des points B_i en fonction du déplacement $\rho_i - \rho_i^0$ des actionneurs, pour $i = 1..6$.

Au regard de la figure 4.11 et en considérant un bruit de mesure d’une dizaine de micromètres puisque les déplacements Δb_i^z du point B_i sont extraits par interpolation linéaire, une approximation linéaire des déplacements des points B_i peut être effectuée. Nous faisons l’hypothèse que les déplacements du i^{eme} actionneur influence les déplacements du point B_i associé de la même façon pour toutes les jambes. Ainsi, la relation linéaire reliant Δb_i^z et $\rho_i - \rho_i^0$ peut s’écrire, en introduisant le coefficient κ_i :

$$\Delta b_i^z = \kappa_i(\rho_i - \rho_i^0) \quad (4.1)$$

La valeur initiale de κ_i a été identifiée à 0.011 pour toutes les jambes, c’est-à-dire pour $i = 1..6$. Nous parlerons de *modèle découplé* pour (4.1) puisque l’effet du déplacement du j^{eme} actionneur sur le déplacement du i^{eme} point d’attache B_i n’est pas considéré. Ce modèle ne considère cependant que les moyennes des déplacements mesurés. Sur la figure 4.12, les déplacements mesurés Δb_i^z du point B_i en fonction du déplacement du i^{eme} actionneur par rapport à sa position initiale $\rho_i - \rho_i^0$ sont superposés pour les 6 actionneurs et les 6 points d’attache B_i . Nous pouvons observer que l’erreur maximale commise par rapport à l’approximation linéaire du *modèle découplé* est d’environ $50\mu\text{m}$, ce qui est supérieur au bruit de mesure. Afin de mieux approcher la déformation de la plate-forme mobile, le *modèle couplé* est introduit

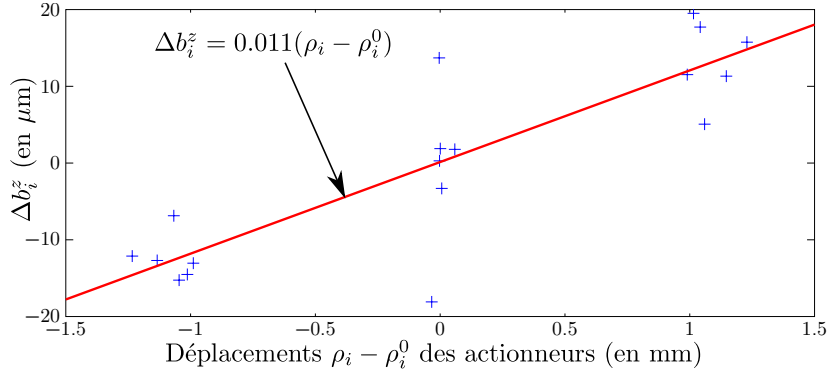


FIGURE 4.11 – Moyennes des erreurs sur la position b_i^z des points B_i en fonction du déplacement des actionneurs, et approximation linéaire de cette déformation de la plate-forme mobile

dans la section suivante.

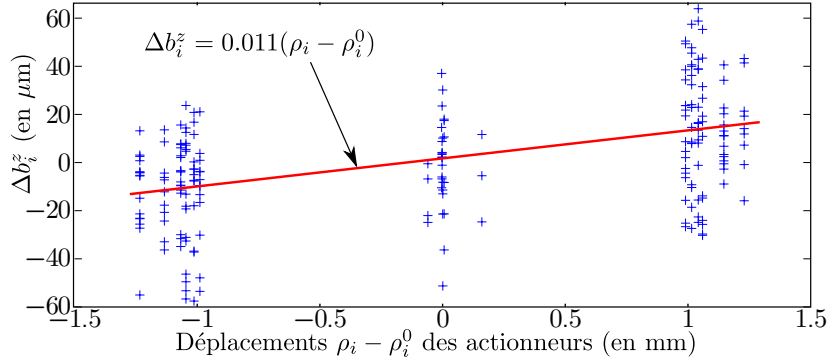


FIGURE 4.12 – Erreur sur la position b_i^z des points B_i en fonction du déplacement des actionneurs, et approximation linéaire issue du modèle découplé.

4.4.3 Modèle couplé

La déformation de la plate-forme mobile est due aux efforts internes dans la structure, générés par la déformation des articulations flexibles. Ces efforts dépendent de l'équilibre statique de la plate-forme qui fait intervenir toutes les forces agissant sur la plate-forme aux points B_i , pour $i = 1..6$. Les forces exercées dépendent du déplacement des actionneurs qui génèrent des déformations des articulations flexibles. Ainsi, nous pouvons penser que le déplacement Δb_i^z du point B_i doit dépendre de l'ensemble des déplacements des actionneurs, et non pas seulement du déplacement du i^{eme} actionneur comme pour le *modèle découplé*. En considérant que les déplacements des points B_i sont dus aux efforts générés par la raideur des articulations flexibles, le *modèle couplé* faisant intervenir une matrice \mathbf{K} de coefficients est donc considéré afin de relier les déplacements $\Delta \mathbf{b}^z = [\Delta b_1^z \dots \Delta b_6^z]^T$ à l'ensemble des déplacements actionneurs, avec $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \dots \rho_6]^T$ et $\boldsymbol{\rho}^0 = [\rho_1^0 \dots \rho_6^0]^T$:

$$\Delta \mathbf{b}^z = \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) \quad (4.2)$$

Afin d’identifier les termes de la matrice \mathbf{K} , les données de la figure 4.12 sont considérées. Pour chaque jambe i , la i^{eme} ligne \mathbf{k}_i de la matrice \mathbf{K} est utilisée pour calculer le déplacement Δb_i^z du point B_i tel que :

$$\Delta b_i^z = \mathbf{k}_i(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) \quad (4.3)$$

L’objectif est d’obtenir la meilleure estimation de Δb_i^z en utilisant (4.3) et en considérant les mesures de la figure 4.12. Une façon de minimiser les distances entre les mesures et les estimations données par la ligne \mathbf{k}_i de la matrice \mathbf{K} est de réaliser une optimisation aux moindres carrés, pour chaque jambe du télescope. La matrice \mathbf{K} obtenue est donnée en (4.4) :

$$\mathbf{K} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 16 & 0 & -8 & 12 & -2 & -20 \\ 0 & 20 & -17 & -1 & 13 & -13 \\ -2 & -15 & 14 & 2 & -9 & 9 \\ 6 & -12 & 4 & 14 & -16 & 2 \\ -12 & 7 & 0 & -15 & 14 & 4 \\ -20 & -1 & 10 & -10 & 2 & 19 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Les éléments identifiés de la matrice \mathbf{K} sont du même ordre de grandeur que le coefficient κ_i du *modèle découplé*. Une analyse de la matrice de corrélation \mathbf{K} montre une grande dépendance entre les jambes 1-6, 2-3 et 4-5. Ceci pourrait être dû à la géométrie de la plate-forme mobile. En effet, comme le montre la figure 4.9, il n’y a pas de barre de renfort qui maintienne l’anneau entre les points d’attache B_1 et B_6 par exemple. Ainsi, le déplacement Δb_1^z peut avoir une grande influence sur le déplacement du point B_6 , l’anneau faisant effet de levier. Il en va de même pour la dépendance entre les jambes 2-3 et 4-5.

En considérant le *modèle couplé* de (4.2), l’erreur maximale commise sur l’estimation des déplacements des points B_i est de $20\mu\text{m}$, et l’erreur moyenne de $5\mu\text{m}$ ce qui est proche du bruit de mesure de variance $3\mu\text{m}$.

Avec les modèles *couplé* et *découplé*, la déformation de la plate-forme mobile peut donc être prise en compte dans les modèles du télescope en définissant un nouveau point d’attache fictif B_i^* tel que $\mathbf{b}_i^* = \mathbf{b}_i + \Delta b_i^z \mathbf{z}_o$. En considérant les points B_i^* dans les équations des modèles, la plate-forme mobile peut alors être considérée comme un solide rigide, sa déformation étant prise en compte dans la définition de B_i^* . Le calcul de Δb_i^z nécessite néanmoins la connaissance des déplacements des actionneurs, ce qui peut poser problème pour le contrôle du télescope. Cette problématique sera traitée dans le prochain chapitre, et nous nous attacherons à la modélisation du comportement géométrique des articulations flexibles dans la section suivante, puisque toutes les autres pièces de la structure peuvent être considérées rigides grâce aux modèles développés.

4.5 Modélisation des articulations flexibles

Les modèles *découplé* et *couplé* développés précédemment permettent de prendre en compte l’influence des efforts internes générés par les articulations flexibles sur les autres éléments de la structure du télescope. Ainsi, seul le comportement géométrique des articulations flexibles reste à modéliser.

Pour les deux premiers modèles développés, les articulations flexibles sont supposées se comporter comme des liaisons rotules parfaites. Cette hypothèse tient compte des simulations informatiques réalisées par Thales Alenia Space qui ont permis de concevoir les articulations flexibles en considérant notamment qu'elles devaient se comporter comme des liaisons parfaites sur l'intégralité de l'espace de travail.

4.5.1 Modèles géométriques du 6-PUS

En considérant que les articulations flexibles ont un comportement idéal sur leur zone de fonctionnement, le manipulateur peut être modélisé par un 6-PUS parfait présenté en figure 4.13.

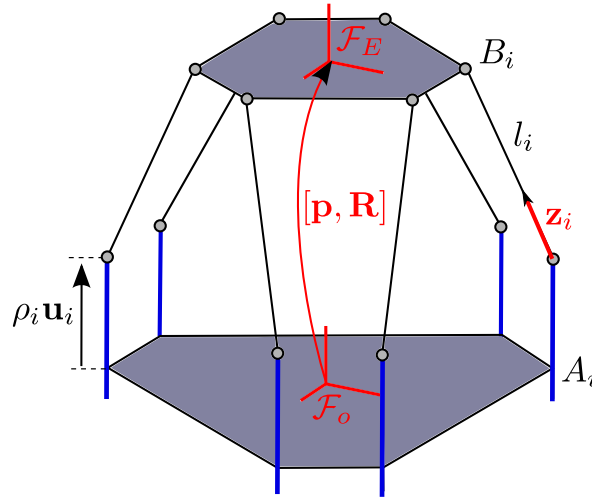


FIGURE 4.13 – Modélisation 6-PUS du télescope

Les équations de fermeture géométrique peuvent s'écrire pour chaque jambe i , avec \mathbf{z}_i la direction de la jambe i comme défini précédemment :

$$\mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i^* = \mathbf{a}_i + \rho_i \mathbf{u}_i + l_i \mathbf{z}_i \quad (4.5)$$

Le modèle géométrique inverse permet de déterminer la position ρ_i des actionneurs en fonction de la position \mathbf{p} et de l'orientation \mathbf{R} de la plate-forme mobile. En considérant connue la direction \mathbf{z}_i de la jambe i et en utilisant (4.5), il s'établit comme :

$$\rho_i = (\mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i - l_i \mathbf{z}_i)^T \mathbf{u}_i \quad (4.6)$$

Dans le cas général, l'orientation \mathbf{z}_i des jambes du télescope n'est cependant pas connue et il est nécessaire d'enlever cette inconnue pour le calcul de la position ρ_i des actionneurs. Ceci peut être effectué en réécrivant (4.5) et en en prenant la norme :

$$\begin{aligned} l_i &= \|\mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i - \rho_i \mathbf{u}_i\|_2 \\ \longrightarrow l_i^2 &= (\mathbf{h}_i - \rho_i \mathbf{u}_i)^T (\mathbf{h}_i - \rho_i \mathbf{u}_i) \\ \text{avec } \mathbf{h}_i &= \mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ce qui conduit à une équation du second degré en les ρ_i :

$$\rho_i^2 - 2\rho_i \mathbf{h}_i^T \mathbf{u}_i + \mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_i - l_i^2 = 0 \quad (4.8)$$

L’équation (4.8) admet habituellement deux solutions réelles :

$$\begin{aligned} \rho_i &= \mathbf{h}_i^T \mathbf{u}_i + \sqrt{(\mathbf{h}_i^T \mathbf{u}_i)^2 - (\|\mathbf{h}_i\|^2 - l_i^2)} \\ \text{et } \rho_i &= \mathbf{h}_i^T \mathbf{u}_i - \sqrt{(\mathbf{h}_i^T \mathbf{u}_i)^2 - (\|\mathbf{h}_i\|^2 - l_i^2)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le choix entre les deux solutions de (4.9) s’effectue en considérant la course possible des actionneurs. Dans notre cas, la seule solution envisageable est :

$$\rho_i = \mathbf{h}_i^T \mathbf{u}_i - \sqrt{(\mathbf{h}_i^T \mathbf{u}_i)^2 - (\|\mathbf{h}_i\|^2 - l_i^2)} \quad (4.10)$$

En ce qui concerne le modèle géométrique direct qui permet de déterminer la pose de la plate-forme mobile à partir de la connaissance de la position ρ_i des actionneurs, il n’est en général pas possible de l’écrire de manière analytique [Mer06b]. Les deux façons habituelles pour résoudre le modèle géométrique direct d’un robot parallèle sont soit l’ajout de capteurs, dans le but de diminuer la complexité du problème, soit l’utilisation d’une procédure numérique itérative [Bon00]. Une procédure numérique itérative peut être de type Newton par exemple. Cependant, la convergence de ce type de méthode vers la solution correcte n’est pas prouvée et l’utilisation d’une méthode certifiée est toujours préférable [Mer04]. Dans le cas du télescope, nous sommes dans une situation favorable puisque celui-ci évolue dans un faible espace de travail, ce qui permet de facilement filtrer une solution aberrante si toutefois cela venait à se produire. De plus, aucune dérive de l’algorithme n’a pu être observée lors des simulations. Pour le modèle géométrique direct du télescope, nous utiliserons donc une méthode de type Newton présentée dans le chapitre 2. Étant donné le faible espace de travail dans lequel évolue le télescope, l’estimée initiale sera considérée identique dans tous les cas et est définie comme la pose de la plate-forme mobile lorsque tous les actionneurs sont à leur position de référence ρ_i^0 .

4.5.2 Modèle cinématique du 6-PUS

Le modèle cinématique établit les relations entre les vitesses articulaires $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ et les vitesses opérationnelles \mathbf{V}_c . En définissant la pose \mathbf{X} de la plate-forme mobile telle que $\mathbf{X} = [\mathbf{p}^T, \theta \mathbf{v}^T]^T$ avec θ et \mathbf{v} respectivement l’angle et l’axe de rotation de la matrice \mathbf{R} , les vitesses opérationnelles suivent la relation $\mathbf{V}_c = \dot{\mathbf{X}}$. Il est possible d’obtenir une relation entre les vitesses articulaires $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ et les vitesses opérationnelles $\dot{\mathbf{X}}$ en dérivant (4.5) par rapport au temps. Le comportement cinématique du télescope est alors décrit par une matrice jacobienne appelée matrice jacobienne cinématique inverse, notée $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})$, telle que $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})\dot{\mathbf{X}}$ [Mer06b]. Pour un 6-PUS et avec les notations précédemment définies, la matrice jacobienne ciné-

tique inverse $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})$ s'écrit :

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{z}_1^T}{\mathbf{u}_1^T \mathbf{z}_1} & (\mathbf{R}\mathbf{b}_1^*)^T \times \frac{\mathbf{z}_1^T}{\mathbf{u}_1^T \mathbf{z}_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\mathbf{z}_i^T}{\mathbf{u}_i^T \mathbf{z}_i} & (\mathbf{R}\mathbf{b}_i^*)^T \times \frac{\mathbf{z}_i^T}{\mathbf{u}_i^T \mathbf{z}_i} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (4.11)$$

Étant donné le faible espace de travail dans lequel évolue le télescope, la matrice jacobienne peut être approchée par une matrice constante, définie comme la matrice jacobienne cinématique inverse de la pose initiale $\mathbf{J}_0^{-1} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}^0)$, sur tout l'espace de travail. Dans ce cas, le comportement géométrique du télescope peut être approché par (4.12) [Zha02] :

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}^0 + \mathbf{J}_0^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0) \quad (4.12)$$

4.5.3 Modèle poutre pour les articulations flexibles

Les modèles précédents considèrent que les articulations flexibles se comportent comme des liaisons parfaites. Afin de prendre en compte leur différence possible de comportement avec une liaison parfaite, les équations de la théorie des poutres sont considérées dans un premier temps.

Devant leur faible rapport diamètre / longueur, les articulations flexibles peuvent être considérées comme une poutre circulaire, comme le montre la figure 4.14.

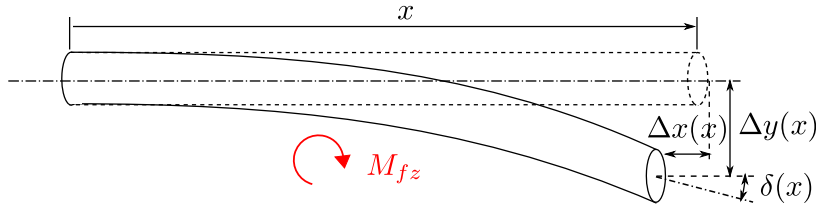


FIGURE 4.14 – Modélisation poutre d'une articulation flexible et déformation associée

Des simulations effectuées par Thales Alenia Space avec un logiciel éléments finis ont permis de montrer l'effet prépondérant du moment fléchissant M_{fz} devant les autres efforts sur la déformation des articulations flexibles. Nous considérons donc l'hypothèse habituelle en théorie des poutres : l'effet du moment fléchissant M_{fz} domine sur l'effet des autres efforts. Les hypothèses d'Euler-Bernoulli permettent alors d'écrire les équations de la théorie des poutres comme :

$$\begin{cases} M_{fz} = EI_{Gz} \gamma \\ \Delta y(x) = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} \frac{x^2}{2} \end{cases} \longrightarrow \Delta y(x) = \gamma \frac{x^2}{2} \quad (4.13)$$

avec E , I_{Gz} et γ respectivement le module d'Young, le moment quadratique et la courbure de l'articulation flexible. La longueur $l(x)$ de la poutre déformée peut ensuite être calculée

avec (4.14) :

$$\begin{aligned} l(x) &= \int_0^x \sqrt{1 + \Delta y'(x)^2} dx \\ \longrightarrow \Delta x(x) &= \int_0^x \sqrt{1 + (\gamma x)^2} dx - x \end{aligned} \quad (4.14)$$

Il a été déterminé que sur tout l'espace de travail du télescope, une articulation flexible ne peut pas être fléchi d'un angle $\delta \geq 1^\circ$ par rapport à sa position initiale, position correspondant à l'inclinaison de la liaison flexible lorsque le télescope est dans sa position de référence. Pour de telles déformations, l'orientation δ peut être approximée par $\delta = \gamma l_b$. Ainsi, les déplacements de l'extrémité de la poutre Δx et Δy peuvent être calculés par :

$$\begin{cases} \Delta y = \Delta y(l_b) = \frac{l_b}{2} \delta \\ \Delta x = \Delta x(l_b) = l_b \left(\frac{\delta \sqrt{1 + \delta^2} + \sinh^{-1}(\delta)}{2\delta} - 1 \right) \end{cases} \quad (4.15)$$

Les équations de (4.15) sont assez difficiles à analyser sous cette forme. Étant donné la faible orientation δ , il est possible de recourir à un développement limité des équations de (4.15) afin de pouvoir analyser les déplacements d'une poutre. Un développement limité à l'ordre 4 des déplacements Δx et Δy semble suffisant et permet l'obtention d'une équation plus simple :

$$\left(\Delta x - \frac{3}{4} l_b \right)^2 + \Delta y^2 = \left(\frac{3}{4} l_b \right)^2 + o(\delta^4) \quad (4.16)$$

ce qui est l'équation d'un cercle de centre $(\frac{3}{4} l_b, 0)$ et de rayon $\frac{3}{4} l_b$.

L'équation (4.15) considère cependant les déplacements Δx et Δy de l'extrémité d'une poutre de longueur l_b par rapport à sa position de référence. Pour pouvoir considérer la position (x, y) de l'extrémité de la poutre, un changement de variable est nécessaire, tel que $x = l_b - \Delta x$ et $y = \Delta y$. L'équation (4.15) en fonction de (x, y) devient alors l'équation d'un cercle de centre $(\frac{1}{4} l_b, 0)$ et de rayon $\frac{3}{4} l_b$. Dans le cas de petites déformations, le comportement d'une articulation flexible de longueur l_b peut donc être assimilé à celui d'un mécanisme constitué de deux barres de longueurs $\frac{1}{4} l_b$ et $\frac{3}{4} l_b$ reliées par une rotule.

Pour les modèles précédents, le comportement cinématique des liaisons flexibles avait été assimilé à celui d'une rotule parfaite. C'est-à-dire qu'une articulation flexible de longueur l_b était précédemment modélisée par deux barres rigides de longueur $\frac{1}{2} l_b$ reliées par une rotule. Afin d'observer les différences de comportement dues à la modélisation, nous comparerons les déplacements Δx et Δy de l'extrémité de 3 mécanismes différents présentés en figure 4.15 : un mécanisme constitué de deux barres de longueurs $\frac{1}{2} l_b$ reliées par une rotule (ce qui correspond à la modélisation utilisée pour le modèle géométrique), un autre constitué de deux barres de longueurs $\frac{1}{4} l_b$ et $\frac{3}{4} l_b$ (ce qui permet de contraindre le mouvement de l'extrémité de la poutre sur un cercle de rayon $\frac{3}{4} l_b$ au regard de (4.16)), et enfin une poutre de longueur l_b . Les déplacements de l'extrémité de la poutre de longueur l_b sont calculés exactement à partir de (4.15) et les déplacements Δx et Δy dans le plan des trois mécanismes sont comparés en figure 4.16 pour une flexion $\delta \in [0; 1^\circ]$.

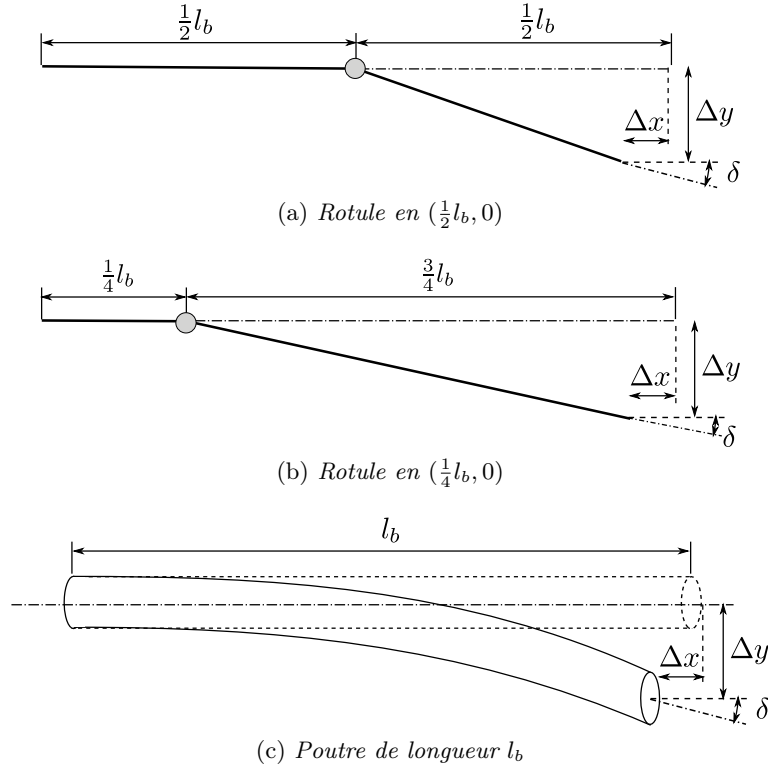


FIGURE 4.15 – Déplacements dans le plan de l'extrémité de 3 mécanismes différents pour une flexion δ

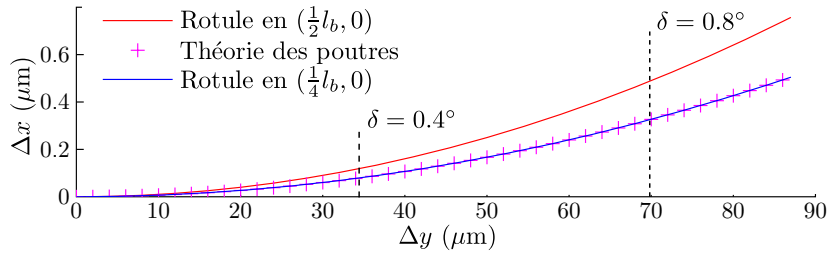


FIGURE 4.16 – Déplacements de l'extrémité d'une articulation flexible de longueur $l_b = 10\text{mm}$ en utilisant la théorie des poutres pour une flexion $\delta \in [0; 1^\circ]$ et comparaison avec le comportement géométrique des mécanismes de la figure 4.15

La figure 4.16 permet d'observer que les déplacements de l'extrémité d'une articulation flexible calculés grâce aux équations (4.15) de la théorie des poutres correspondent parfaitement à ceux de l'extrémité du mécanisme présenté en figure 4.15.b. C'est-à-dire que les déplacements de l'extrémité d'une articulation flexible sont contraints sur un cercle (ou une sphère dans l'espace) de centre $(\frac{1}{4}l_b, 0)$ et de rayon $\frac{3}{4}l_b$ pour des flexions ne dépassant pas 1° .

Cependant, pour un déplacement Δy donné, l'orientation δ des articulations flexibles correspond à celle du mécanisme de la figure 4.15.a (mécanisme constitué de deux barres de longueurs $\frac{1}{2}l_b$ reliées par une rotule) et non plus à celle du mécanisme de la figure 4.15.b. Afin de prendre en compte ce comportement des articulations flexibles, le modèle cinéma-

tique de la figure 4.17 est développé. Avec ce modèle, les déplacements de l'extrémité d'une articulation flexible de longueur l_{bi} sont contraints sur une sphère de rayon $(1 - \beta_i)l_{bi}$ et de centre $\mathbf{c}_i - (\frac{1}{2} - \beta_i)l_{bi}\mathbf{z}_i^0$, avec \mathbf{z}_i^0 l'orientation initiale de la jambe i pour laquelle les articulations flexibles ne sont pas fléchies. La valeur initiale du paramètre β_i du modèle est fixée à $\beta_i = \frac{1}{4}$ afin que les déplacements correspondent aux résultats de (4.16). L'orientation des articulations flexibles est la même que celle obtenue avec une rotule parfaite au point \mathbf{c}_i .

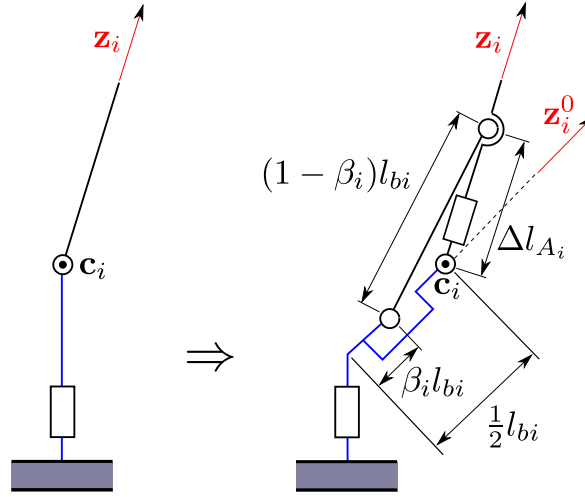


FIGURE 4.17 – Modèle cinématique d'une articulation flexible

Avec le modèle cinématique de la figure 4.17, les équations de fermeture géométrique deviennent pour chaque jambe i :

$$\mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i - \rho_i \mathbf{u}_i = (l_i - l_{bi} + \Delta l_{Ai} + \Delta l_{Bi})\mathbf{z}_i \quad (4.17)$$

avec Δl_{Ai} et Δl_{Bi} les déplacements des articulations flexibles de la jambe i attachées respectivement à la base et à la plate-forme mobile.

Écrire la plus petite chaîne cinématique impliquant Δl_{Ai} en permet son calcul :

$$\begin{aligned} (1 - \beta_i)l_{bi} &= \|(\frac{1}{2} - \beta_i)l_{bi}\mathbf{z}_i^0 + \Delta l_{Ai}\mathbf{z}_i\| \\ \longrightarrow (1 - \beta_i)^2 l_{bi}^2 &= (\frac{1}{2} - \beta_i)^2 l_{bi}^2 + 2(\frac{1}{2} - \beta_i)l_{bi}\Delta l_{Ai}\mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i^0 + \Delta l_{Ai}^2 \\ \longrightarrow \Delta l_{Ai}^2 &+ (1 - 2\beta_i)l_{bi}\mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i^0 \Delta l_{Ai} + (\beta_i - \frac{3}{4})l_{bi}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

L'équation (4.18) du second degré admet deux solutions réelles, dont une seule est positive. Au regard de la figure 4.17 et en considérant que $\beta_i \approx \frac{1}{4}$, il est clair que Δl_{Ai} doit être une valeur positive. Ainsi, seule la solution positive pour Δl_{Ai} est considérée :

$$\Delta l_{Ai} = \frac{l_{bi}}{2} \left((2\beta_i - 1)\mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i^0 + \sqrt{3 - 4\beta_i + ((1 - 2\beta_i)\mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i^0)^2} \right) \quad (4.19)$$

Procéder de manière identique permet le calcul de Δl_{Bi} :

$$\Delta l_{Bi} = \frac{l_{bi}}{2} \left((2\beta_i - 1)\mathbf{z}_i^T \mathbf{R}\mathbf{z}_i^0 + \sqrt{3 - 4\beta_i + ((1 - 2\beta_i)\mathbf{z}_i^T \mathbf{R}\mathbf{z}_i^0)^2} \right) \quad (4.20)$$

Afin d'obtenir le modèle géométrique inverse du modèle poutre, il faut donc résoudre un système constitué de 6 équations algébriques issues de (4.17), (4.19) et (4.20) en les 6 inconnues ρ_i , \mathbf{z}_i , Δl_{A_i} et Δl_{B_i} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i - \rho_i \mathbf{u}_i = (l_i - l_{bi} + \Delta l_{A_i} + \Delta l_{B_i}) \mathbf{z}_i \\ \left(\frac{2\Delta l_{A_i}}{l_{bi}} + (1 - 2\beta_1) \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i^0 \right)^2 = 3 - 4\beta_i + ((1 - 2\beta_i) \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_i^0)^2 \\ \left(\frac{2\Delta l_{B_i}}{l_{bi}} + (1 - 2\beta_1) \mathbf{z}_i^T \mathbf{R} \mathbf{z}_i^0 \right)^2 = 3 - 4\beta_i + ((1 - 2\beta_i) \mathbf{z}_i^T \mathbf{R} \mathbf{z}_i^0)^2 \\ \|\mathbf{z}_i\|^2 = 1 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Les équations de (4.17) sont linéaires en \mathbf{z}_i , ce qui donne une équation pour ρ_i qui peut alors être exprimé en fonction de Δl_{A_i} et Δl_{B_i} . En injectant ces solutions dans (4.19) et (4.20), il reste deux équations impliquant Δl_{A_i} et Δl_{B_i} de degré 8 et 7 respectivement. En utilisant la fonction TRYNEWTON de la librairie d'analyse par intervalles ALIAS [Mer], l'unicité de la solution au voisinage des valeurs nominales de Δl_{A_i} et Δl_{B_i} a pu être prouvée, ainsi que la convergence de Newton. Ainsi, il est possible d'utiliser un algorithme itératif de Gauss-Newton pour un calcul rapide du modèle géométrique inverse du modèle poutre.

La figure 4.16 montre néanmoins que la différence de déplacement de l'extrémité d'une articulation flexible entre le modèle poutre et un mécanisme constitué de deux barres de longueurs $\frac{1}{2}l_b$ reliées par une rotule est de l'ordre de $0.3\mu\text{m}$ pour une flexion $\delta = 1^\circ$. Cette différence est minime par rapport aux déformations observées pour la plate-forme mobile. Dans la section suivante, un modèle de raideur, plus complexe, est considéré.

4.5.4 Modèle de raideur

La différence de comportement géométrique d'une articulation flexible avec une liaison parfaite est prise en compte dans le modèle précédent avec les équations de la théorie des poutres. Cependant, la position de la plate-forme mobile du télescope dépend aussi de son équilibre statique impliquant toutes les forces appliquées par les articulations flexibles. Les conditions d'équilibre statique de la plate-forme mobile sont écrites en (4.22), avec $\tilde{\mathbf{P}}_E$ les forces externes s'appliquant au centre de la plate-forme mobile (typiquement le poids dans notre cas), $\tilde{\mathbf{P}}_{b'}^i$ les efforts générés par les articulations flexibles sur la plate-forme mobile aux points d'attache B'_i (définis en figure 4.19), et \mathbf{M}_i une matrice 6×6 prenant en compte le transport des moments :

$$\tilde{\mathbf{P}}_E + \sum_{i=1}^6 \mathbf{M}_i \tilde{\mathbf{P}}_{b'}^i = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Id}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 0 & -\tilde{b}_i^z & \tilde{b}_i^y \\ \tilde{b}_i^z & 0 & \tilde{b}_i^x & \mathbf{Id}_{3 \times 3} \\ -\tilde{b}_i^y & \tilde{b}_i^x & 0 & \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

\mathbf{Id} étant la matrice identité et \tilde{b}_i^x , \tilde{b}_i^y et \tilde{b}_i^z , les coordonnées du i^{eme} point d'attache B'_i exprimées dans le repère de la base \mathcal{F}_o .

Les efforts générés par les articulations flexibles sont fonction de leur déformation. Afin de pouvoir relier la déformation des articulations flexibles aux efforts générés, il est nécessaire de connaître leur matrice de raideur.

4.5.4.1 Matrice de raideur locale d'une articulation flexible

Les articulations flexibles du télescope peuvent être assimilées à des cylindres parfaits de faible diamètre par rapport à leur longueur, comme le montre la figure 4.18. Ainsi, leur matrice de raideur peut être calculée à partir de la théorie des éléments finis [Don05].

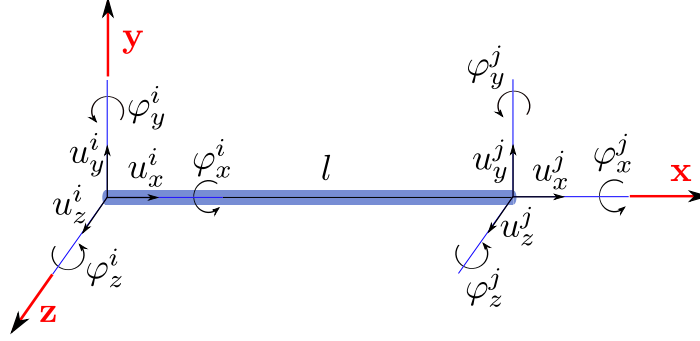


FIGURE 4.18 – Système de coordonnées local d'une articulation flexible

La matrice de raideur locale de l'élément de la figure 4.18 relie les efforts $[\mathbf{P}_i^T, \mathbf{P}_j^T]^T$ aux nœuds i et j à leurs déplacements $[\mathbf{u}_i^T, \mathbf{u}_j^T]^T$ tel que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_j \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{loc} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

avec $\mathbf{P}_i = [F_x^i, F_y^i, F_z^i, M_x^i, M_y^i, M_z^i]^T$ un vecteur répertoriant les coordonnées des efforts et des moments exprimés au nœud i et $\mathbf{u}_i = [u_x^i, u_y^i, u_z^i, \varphi_x^i, \varphi_y^i, \varphi_z^i]^T$, $(\varphi_z^i, \varphi_y^i, \varphi_x^i)$ étant les angles d'Euler suivant ZYX (de même pour j).

En considérant un élément poutre de longueur l , de section S , de modules d'Young et de cisaillement E et G , et de moments quadratique et polaire I et J , la matrice de raideur locale \mathbf{K}_{loc} peut s'écrire, avec $k_1 = EI$, $k_2 = ES$ et $k_3 = GJ$:

$$\mathbf{K}_{loc} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (4.24)$$

avec

$$\mathbf{K}_{11} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12k_1}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6k_1}{l} \\ 0 & 0 & \frac{12k_1}{l^2} & 0 & -\frac{6k_1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6k_1}{l} & 0 & 4k_1 & 0 \\ 0 & \frac{6k_1}{l} & 0 & 0 & 0 & 4k_1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12k_1}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6k_1}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{12k_1}{l^2} & 0 & -\frac{6k_1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6k_1}{l} & 0 & 2k_1 & 0 \\ 0 & \frac{6k_1}{l} & 0 & 0 & 0 & 2k_1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

$$\mathbf{K}_{21} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12k_1}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6k_1}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{12k_1}{l^2} & 0 & \frac{6k_1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6k_1}{l} & 0 & 2k_1 & 0 \\ 0 & -\frac{6k_1}{l} & 0 & 0 & 0 & 2k_1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

$$\mathbf{K}_{22} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12k_1}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6k_1}{l} \\ 0 & 0 & \frac{12k_1}{l^2} & 0 & \frac{6k_1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6k_1}{l} & 0 & 4k_1 & 0 \\ 0 & -\frac{6k_1}{l} & 0 & 0 & 0 & 4k_1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

4.5.4.2 Résolution du modèle de raideur inverse

Une fois les matrices de raideur locales des éléments flexibles développées, il faut maintenant les assembler afin de pouvoir relier les déplacements $\boldsymbol{\rho}_i$ des actionneurs aux efforts générés sur la plate-forme mobile. Pour des raisons de simplicité de calcul, chaque jambe de longueur l_i est considérée comme un élément flexible ayant pour matrice de raideur \mathbf{K}^l dont les coefficients dépendent de leur forme et des matériaux utilisés. Chaque articulation flexible est identifiée par une matrice de raideur \mathbf{K}^b identique pour chaque articulation et le modèle de raideur d'une chaîne cinématique du télescope est présenté en figure 4.19.

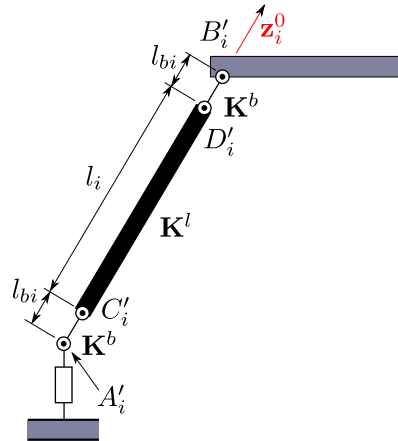


FIGURE 4.19 – Modèle de raideur d'une chaîne cinématique du télescope

Contrairement aux modèles développés précédemment, où les points B_i et C_i représentaient le centre de rotation des liaisons rotules, les points A'_i , B'_i , C'_i et D'_i de la figure 4.19 correspondent aux points d'attache des articulations flexibles. Dans la configuration non-

déformée, les coordonnées de ces points suivent donc les relations :

$$\begin{cases} \mathbf{a}'_i = \mathbf{c}_i - \frac{1}{2}l_{bi}\mathbf{z}_i^0 \\ \mathbf{b}'_i = \mathbf{b}_i^* + \frac{1}{2}l_{bi}\mathbf{z}_i^0 \\ \mathbf{c}'_i = \mathbf{c}_i + \frac{1}{2}l_{bi}\mathbf{z}_i^0 \\ \mathbf{d}'_i = \mathbf{b}_i^* - \frac{1}{2}l_{bi}\mathbf{z}_i^0 \end{cases} \quad (4.25)$$

En considérant la figure 4.19, la matrice de raideur totale de chaque jambe peut être calculée (l'indice i est volontairement omis pour des raisons de clarté) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{a}'} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{c}'} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{d}'} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{b}'} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{a}'} \\ \mathbf{u}_{\mathbf{c}'} \\ \mathbf{u}_{\mathbf{d}'} \\ \mathbf{u}_{\mathbf{b}'} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

avec

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^d & \mathbf{K}_{12}^d & & \\ \mathbf{K}_{21}^d & \mathbf{K}_{22}^d + \mathbf{K}_{11}^l & \mathbf{K}_{12}^l & \\ & \mathbf{K}_{21}^l & \mathbf{K}_{22}^l + \mathbf{K}_{11}^d & \mathbf{K}_{12}^d \\ & & \mathbf{K}_{21}^d & \mathbf{K}_{22}^d \end{bmatrix}_{24 \times 24} \quad (4.27)$$

Notons que $\mathbf{P}_{\mathbf{c}'}$ et $\mathbf{P}_{\mathbf{d}'}$ sont définis comme les efforts extérieurs à la structure qui s'appliquent respectivement en C'_i et D'_i . Ces efforts sont donc nuls. Les équations (4.26) et (4.27) peuvent donc être réécrites en regroupant les paramètres connus et inconnus [Che04] : $\mathbf{P}_{don} = [\mathbf{P}_{\mathbf{c}'}^T, \mathbf{P}_{\mathbf{d}'}^T]^T$, $\mathbf{P}_{inc} = [\mathbf{P}_{\mathbf{a}'}^T, \mathbf{P}_{\mathbf{b}'}^T]^T$, $\mathbf{u}_{don} = [\mathbf{u}_{\mathbf{a}'}^T, \mathbf{u}_{\mathbf{b}'}^T]^T$ et $\mathbf{u}_{inc} = [\mathbf{u}_{\mathbf{c}'}^T, \mathbf{u}_{\mathbf{d}'}^T]^T$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{don} \\ \mathbf{P}_{inc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_f \\ \mathbf{K}_f^T & \mathbf{K}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{don} \\ \mathbf{u}_{inc} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathbf{K}_u &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22}^d + \mathbf{K}_{11}^l & \mathbf{K}_{12}^l \\ \mathbf{K}_{21}^l & \mathbf{K}_{22}^l + \mathbf{K}_{11}^d \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_f &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21}^d & \\ & \mathbf{K}_{12}^d \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^d & \\ & \mathbf{K}_{22}^d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Il est alors possible de relier les efforts \mathbf{P}_{inc} à déterminer aux déplacements connus \mathbf{u}_{don} avec (4.30), en considérant $\mathbf{P}_{\mathbf{c}'} = \mathbf{P}_{\mathbf{d}'} = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \mathbf{0}_{12 \times 1} = \mathbf{K}_u \mathbf{u}_{inc} + \mathbf{K}_f \mathbf{u}_{don} \\ \mathbf{P}_{inc} = \mathbf{K}_f^T \mathbf{u}_{inc} + \mathbf{K}_c \mathbf{u}_{don} \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\longrightarrow \mathbf{P}_{inc} = \left(\mathbf{K}_c - \mathbf{K}_f^T \mathbf{K}_u^{-1} \mathbf{K}_f \right) \mathbf{u}_{don}$$

Cependant, (4.30) est toujours exprimée dans le repère local \mathcal{F}_i à la jambe considérée. Afin d'obtenir les équations d'équilibre statique dans le repère de la base \mathcal{F}_o , il est nécessaire de prendre en compte la matrice d'orientation initiale \mathbf{R}_i^0 de la i^{eme} jambe. Il est alors possible de calculer les efforts $\tilde{\mathbf{P}}_{inc}^i$ et les déplacements $\tilde{\mathbf{u}}_{don}^i$ exprimés dans le repère de la base \mathcal{F}_o avec (4.31), \mathbf{T}_{i0} étant une matrice de passage telle que $\mathbf{T}_{i0} = \text{diag}(\mathbf{R}_i^0, \mathbf{R}_i^0, \mathbf{R}_i^0, \mathbf{R}_i^0)$ où $\text{diag}()$ représente une matrice diagonale par blocs [HS81] :

$$\tilde{\mathbf{P}}_{inc}^i = \tilde{\mathbf{K}}^i \tilde{\mathbf{u}}_{don}^i = \mathbf{T}_{i0} (\mathbf{K}_c - \mathbf{K}_f^T \mathbf{K}_u^{-1} \mathbf{K}_f) \mathbf{T}_{i0}^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_{don}^i \quad (4.31)$$

Et donc :

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{b}'}^i = \tilde{\mathbf{K}}_{21}^i \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}'}^i + \tilde{\mathbf{K}}_{22}^i \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}'}^i \quad (4.32)$$

Les efforts $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{b}'}^i$ générés par les articulations flexibles de la jambe i sur la plate-forme mobile ne sont donc fonction que des déplacements $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}'}^i$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}'}^i$ des nœuds A'_i et B'_i . En supposant connue l'orientation \mathbf{R}_i de la i^{eme} jambe, le déplacement $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}'}^i$ ne dépend que du déplacement $\rho_i - \rho_i^0$ du i^{eme} actionneur, et le déplacement $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}'}^i$ peut être facilement calculé pour une pose donnée de la plate-forme mobile. Ainsi, $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{b}'}^i$ ne dépend que de l'inconnu ρ_i pour une pose donnée. La condition d'équilibre statique de la plate-forme mobile (4.22) devient donc un système de 6 équations en les 6 inconnues ρ .

Cependant, l'orientation de la i^{eme} jambe, nécessaire au calcul des déplacements $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}'}^i$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}'}^i$, dépend aussi du déplacement des actionneurs ρ . Le modèle de raideur inverse nécessite donc le recours à un processus itératif pour l'algorithme d'optimisation afin de déterminer les ρ qui minimisent (4.22). Contrairement à Dong *et al.* dans [Don05], les matrices de raideur globales ne sont pas recalculées à chaque itération dans notre cas. En effet, même si ces matrices dépendent de la position et de l'orientation des articulations flexibles, nous avons observé que les réévaluer en cours d'optimisation ne modifie pas les résultats obtenus. Ceci est dû à la faible flexion des articulations flexibles sur l'espace de travail : la prise en compte de la modification de l'orientation des jambes génère des variations sur les valeurs de ρ inférieures au bruit de mesure de $3\mu\text{m}$.

4.6 Conclusion

Grâce aux données de photogrammétrie, l'hypothèse de corps rigide a pu être invalidée pour la plate-forme mobile du télescope. En effet, les déformations de la plate-forme mobile, dues aux efforts générés par les articulations flexibles, semblent plus importantes que celles calculées par simulations éléments finis, notamment au niveau des points d'attache. L'analyse des mesures a permis de définir deux modèles non-paramétriques afin de prendre en compte la déformation de la plate-forme mobile : un *modèle découplé* et un *modèle couplé* prenant en compte les influences relatives de la position des actionneurs sur les résultats de déformation. Ces modèles permettent de considérer la déformation de la plate-forme mobile indépendamment de la modélisation du comportement des articulations flexibles.

Quatre modèles paramétriques ont été développés pour prendre en compte le comportement des articulations flexibles : un modèle géométrique du 6-PUS, un modèle cinématique, un modèle considérant les équations de la théorie des poutres et un modèle de raideur. La modélisation 6-PUS s'appuie sur les résultats de simulations élément finis qui montrent que le comportement des articulations flexibles est idéal dans leur zone de fonctionnement. Étant donné le faible espace de travail dans lequel évolue le télescope, le modèle cinématique peut être dégénéré en une matrice constante sur l'espace de travail. Cependant, les données de photogrammétrie montrent un écart aux résultats issus de simulation et nous pouvons penser que le comportement des articulations flexibles n'est pas idéal dans leur zone de fonctionnement. Afin de prendre en compte l'effet des efforts des articulations flexibles sur le positionnement de la plate-forme et leur différence de comportement géométrique avec une rotule parfaite, le modèle de raideur et celui utilisant les équations de la théorie des poutres ont été développés.

L’objectif est maintenant de pouvoir choisir entre ces différents modèles. En effet, il semblerait que le modèle le plus complexe, c’est-à-dire le modèle raideur en considérant le *modèle couplé* pour la déformation de la plate-forme, génère de meilleurs résultats en terme de précision finale atteinte que des modèles plus simples. Cependant, le modèle le plus complexe est aussi le modèle comportant le plus grand nombre de paramètres. Étant donné que les paramètres des modèles sont mal estimés à cause des erreurs de fabrication et d’assemblage, il est possible que l’effet de ces incertitudes sur la précision finale soit plus important dans le cas de modèles complexes. Il est donc nécessaire de recourir à des méthodes d’étalonnage afin d’obtenir une meilleure estimation des paramètres des modèles pour pouvoir comparer convenablement les modèles entre eux. Dans le chapitre suivant, nous cherchons donc à effectuer le meilleur choix de modèle parmi les modèles possibles, en prenant en compte le fait que les modèles peuvent être étalonnés.

Choix du modèle géométrique par étalonnage photogrammétrique

Résumé : Les valeurs des paramètres des modèles développés dans le chapitre précédent sont mal connues à cause des erreurs possibles de fabrication et d'assemblage. Les modèles n'utilisant pas les mêmes jeux de paramètres, ils ne peuvent être comparés qu'en analysant leur influence sur un critère commun tel que la précision absolue du télescope après étalonnage. Afin de choisir le modèle le plus convenable pour le télescope d'observation spatial actif, les données de photogrammétrie sont utilisées pour étalonner le télescope en considérant successivement chacun des modèles. Les résultats obtenus en terme de précision finale permettent alors un choix avisé du modèle à considérer. L'analyse des résultats d'étalonnage montrera que les paramètres additionnels des modèles poutre et de raideur ne sont pas identifiables. Ainsi, les incertitudes sur ces paramètres ne peuvent pas être diminuées, ce qui ne permet aucune amélioration sur la précision finale obtenue par rapport au modèle géométrique du 6-PUS. D'autre part, l'effet de certaines sources d'erreurs non modélisées sur la valeur des paramètres identifiés peut être expérimentalement observé grâce aux différents modèles de déformation de la plate-forme mobile développés précédemment. Nous montrons alors que ne pas imposer aux paramètres du modèle de rester au voisinage de leur valeur nominale permet à l'algorithme d'identification de prendre en compte les sources d'erreur non modélisées directement dans la valeur des paramètres du modèle, ce qui améliore les résultats obtenus en terme de précision finale dans notre cas.

Sommaire

5.1	Introduction	78
5.2	Méthodologie utilisée	78
5.3	Protocole expérimental	79
5.3.1	Fonctions d'identification et jeux de paramètres à identifier	79
5.3.2	Choix des configurations de mesure	81
5.4	Étalonnage à partir de la pose de la plate-forme mobile	84
5.4.1	Sans prise en compte de la déformation de la plate-forme	84
5.4.2	Avec le modèle découplé de déformation de la plate-forme	89
5.4.3	Avec le modèle couplé de déformation de la plate-forme	91
5.4.4	Analyse des résultats	94
5.5	Étalonnage en prenant en compte l'orientation des jambes	96
5.5.1	Modèle et fonction d'identification utilisés	96
5.5.2	Analyse des résultats	97
5.6	Conclusions	99

5.1 Introduction

Les articulations flexibles utilisées pour l'architecture du télescope d'observation spatial actif génèrent des efforts internes sur la structure du télescope, et leur comportement géométrique peut différer de celui d'une articulation idéale. Nous avons vu par ailleurs que les efforts générés par les articulations flexibles impliquent une déformation de la plate-forme mobile. Deux modèles ont été développés pour prendre en compte cette déformation dans le chapitre précédent : *découplé* et *couplé*. En ce qui concerne le comportement géométrique des articulations flexibles, quatre modèles ont été proposés dans le chapitre précédent : géométrique, cinématique, poutre et raideur. L'objectif est maintenant de trouver la meilleure combinaison de modèles qui permette d'améliorer les performances du télescope. Étant donné que la valeur réelle des paramètres des modèles est inconnue à cause, entre autres, des erreurs de fabrication et d'assemblage, il est nécessaire de recourir à une méthode d'étalonnage afin d'assurer la bonne comparaison des modèles.

Dans ce chapitre, toutes les différentes combinaisons de modèles seront considérées. Chaque combinaison sera étalonnée en utilisant les mesures de photogrammétrie, qui permettent d'obtenir un grand nombre de mesures avec la meilleure précision possible à notre disposition. Enfin, les précisions finales obtenues après étalonnage seront comparées pour chacun des modèles dans le but de trouver la (ou les) bonne(s) combinaison(s) pour modéliser le comportement du télescope.

La méthodologie d'étalonnage que nous utiliserons dans ce chapitre diffère de la méthodologie présentée dans le chapitre 3. La méthodologie du chapitre 3 est un travail de synthèse qui permet d'obtenir les précisions nécessaires sur les paramètres du modèle et sur les mesures afin de garantir l'obtention d'une certaine précision. Ici, la méthodologie considérée sera plus un travail d'analyse qui permet d'obtenir la meilleure précision absolue possible après étalonnage à partir d'une précision de mesure fixée par le protocole expérimental dans le but d'assurer la bonne comparaison des modèles.

Nous préciserons tout d'abord la méthodologie à utiliser. Afin de garantir la meilleure qualité d'étalonnage possible, les configurations de mesure utilisées pour l'étalonnage seront optimisées dans le but d'améliorer l'identification des paramètres. Ensuite, l'étalonnage sera réalisé pour chacun des modèles, ce qui en permettra leur comparaison.

5.2 Méthodologie utilisée

Quatre modèles ont été développés pour les articulations flexibles. La déformation de la plate-forme mobile peut ne pas être considérée, ou être estimée par l'intermédiaire de deux modèles différents. Il y a donc 12 modèles différents à étalonner, puis à comparer.

L'objectif est de chercher à obtenir directement la meilleure précision possible après étalonnage, avec chacun des modèles. Cette méthode s'approche donc de la méthodologie classique présentée dans le chapitre 2. Dans ce cas, étant donné que la précision nécessaire sur les paramètres $\Delta \xi^{\text{nec}}$ n'est pas connue, il n'est alors pas possible de définir le bruit de mesure maximal admissible $\Delta \mathbf{m}^{\text{max}}$ permettant de garantir que la fonction d'identification ne dépende que de la variation des paramètres du modèle. Cette condition est cependant une

condition nécessaire pour l'étalonnage et est rappelée en (5.1).

$$\forall p = 1..N_p, \quad \text{abs}(\mathbf{G}_m^p)\Delta\mathbf{m}^{\max} + \text{abs}(\mathbf{G}_\rho^p)\Delta\boldsymbol{\rho} < \text{abs}(\mathbf{G}_\xi^p)\Delta\xi^{\text{nec}} \quad (5.1)$$

Une façon d'estimer le bruit de mesure maximal admissible $\Delta\mathbf{m}^{\max}$ sans connaître la précision nécessaire sur les paramètres $\Delta\xi^{\text{nec}}$ peut alors être de rendre négligeable le terme $\text{abs}(\mathbf{G}_m^p)\Delta\mathbf{m}^{\max}$ devant $\text{abs}(\mathbf{G}_\rho^p)\Delta\boldsymbol{\rho}$ dans (5.1). Ainsi, la précision possible des paramètres du modèle ne dépend que des incertitudes sur les actionneurs, ce qui est le meilleur des cas. Il n'est cependant pas toujours possible d'utiliser un moyen de mesure répondant à ces critères, que ce soit pour des raisons technologiques ou financières. Toutefois, le calcul de $\text{abs}(\mathbf{G}_\rho^p)\Delta\boldsymbol{\rho}$ permet de donner un ordre de grandeur sur la précision nécessaire de la mesure, et donc une idée de l'appareil de mesure à considérer.

Dans le cas du télescope, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'en considérant un modèle 6-PUS parfait, les incertitudes $\Delta\boldsymbol{\rho}$ sur la position des actionneurs généraient dans le pire des cas des erreurs de positionnement de la plate-forme mobile de $6\mu\text{m}$ et 10^{-3}° sur l'ensemble de l'espace de travail. Ainsi, si la position et l'orientation de la plate-forme mobile sont mesurées, il faudrait que le bruit des mesures soit au moins inférieur à $6\mu\text{m}$ et 10^{-3}° pour s'approcher du meilleur des cas et avoir la meilleure identification possible des paramètres du modèle. En parallèle, nous avons aussi vu que le traitement des données de photogrammétrie par l'intermédiaire de l'algorithme proposé par Haralick permettait une estimation de la position et de l'orientation d'un élément rigide du même ordre de grandeur que la précision des mesures, de déviation standard de $3\mu\text{m}$ dans notre cas. Ainsi, la précision des mesures issues des données de photogrammétrie permet de s'approcher du cas idéal pour lequel l'identifiabilité des paramètres du modèle ne dépend que des incertitudes sur les actionneurs. Notons de plus que la photogrammétrie est le moyen de mesure le plus précis à notre disposition.

Dans ce chapitre, l'étalonnage sera donc réalisé en considérant les données issues de la photogrammétrie. Le protocole expérimental mis en place est décrit dans la section suivante.

5.3 Protocole expérimental

Chaque modèle décrit précédemment doit être étalonné en utilisant les données de photogrammétrie. Pour chaque modèle, différentes fonctions d'identification peuvent être utilisées, pour un nombre différent de paramètres à identifier. Dans un premier temps, nous définirons donc les fonctions d'identifications utilisées pour chaque modèle. Puis, les configurations de mesure seront optimisées afin d'améliorer la robustesse de l'algorithme d'identification aux erreurs de mesure.

5.3.1 Fonctions d'identification et jeux de paramètres à identifier

A partir des données de photogrammétrie, la position et l'orientation de la plate-forme mobile seront disponibles avec l'algorithme d'Haralick [Har89]. Ces mesures doivent ensuite être reliées aux paramètres des modèles par l'intermédiaire de fonctions d'identification afin de permettre l'identification des paramètres. L'intégralité des données de positionnement de l'effecteur étant mesurée, il est possible de recourir à un étalonnage implicite [Wam95], comme

présenté dans le chapitre 2. Pour certains modèles, il sera alors possible d'étalonner chaque jambe indépendamment.

Les fonctions d'identification peuvent être facilement extraites des équations de boucle de fermeture géométrique présentées dans le chapitre précédent, pour chacun des modèles. Dans ce chapitre, tout paramètre x indicé x^p est une mesure, ou est issu d'une mesure réalisée pour la p^{eme} configuration de mesure.

5.3.1.1 Pour le modèle géométrique

Pour le modèle géométrique du 6-PUS, chaque jambe i peut être étalonnée indépendamment en considérant la fonction d'identification $^1g_{i,p}$ de la i^{eme} jambe pour la pose p . Le jeu de paramètres $\{\mathbf{a}_i^T, \mathbf{b}_i^T, \mathbf{u}_i^T, l_i\}$ décrit l'intégralité du modèle pour chaque jambe i .

$$^1g_{i,p} = l_i - \|\mathbf{p}^p + \mathbf{R}^p \mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i - \rho_i^p \mathbf{u}_i\| \quad (5.2)$$

La fonction d'identification $^1g_{i,p}$ de (5.2) a une réelle signification physique puisqu'elle reflète l'erreur commise sur l'estimation de la longueur l_i de la i^{eme} jambe pour la pose p . Ceci n'aurait pas été le cas si nous avions considéré la fonction d'identification $g_{i,p}^{carre}$ de (5.3), souvent utilisée pour l'étalonnage.

$$g_{i,p}^{carre} = l_i^2 - \|\mathbf{p}^p + \mathbf{R}^p \mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i - \rho_i^p \mathbf{u}_i\|^2 \quad (5.3)$$

5.3.1.2 Pour le modèle cinématique

Étant donné que la i^{eme} ligne de la matrice jacobienne cinématique inverse \mathbf{J}_0^{-1} dépend de la matrice de rotation initiale \mathbf{R}^0 de la plate-forme mobile, fonction de l'ensemble des paramètres du modèle, l'étalonnage ne peut pas être réalisé indépendamment pour chaque jambe dans ce cas. La fonction d'identification considérée est alors $^2\mathbf{g}_p$ et les jeux de paramètres à identifier $\{\mathbf{a}_i^T, \mathbf{b}_i^T, \mathbf{u}_i^T, l_i, \rho_i^0\}$ pour chaque jambe, \mathbf{X}^0 pouvant être calculé à partir de ρ^0 en considérant le modèle géométrique direct du modèle 6-PUS (voir section 4.5.1).

$$^2\mathbf{g}_p = \rho^p - \rho^0 + \mathbf{J}_0^{-1}(\mathbf{X}^p - \mathbf{X}^0) \quad (5.4)$$

5.3.1.3 Pour le modèle poutre

La fonction d'identification $^3g_{i,p}$ est extraite des équations de fermeture géométrique de (4.17). Les longueurs $\Delta l_{A_i}^p$ et $\Delta l_{B_i}^p$ sont fonction des mesures, mais aussi des paramètres de conception β_i et l_{bi} qui doivent donc être pris en compte dans les paramètres du modèle à identifier pour chaque jambe i : $\{\mathbf{a}_i^T, \mathbf{b}_i^T, \mathbf{u}_i^T, l_i, \beta_i, l_{bi}\}$.

$$^3g_{i,p} = (l_i - l_{bi} + \Delta l_{A_i}^p + \Delta l_{B_i}^p) - \|\mathbf{p}^p + \mathbf{R}^p \mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i - \rho_i^p \mathbf{u}_i\| \quad (5.5)$$

5.3.1.4 Pour le modèle de raideur

Enfin, le modèle de raideur considère l'équilibre statique de la plate-forme mobile qui fait intervenir les efforts appliqués par chacune des articulations flexibles sur la plate-forme. L'étalonnage ne peut donc pas être effectué pour chaque jambe indépendamment. La fonction

d'identification ${}^4\mathbf{g}_p$ considère les paramètres $\{\mathbf{a}_i^T, \mathbf{b}_i^T, \mathbf{u}_i^T, l_i, l_{bi}\}$ pour chaque jambe. Les paramètres de raideur $\{k_1^d, k_2^d, k_3^d, k_1^l, k_2^l, k_3^l\}$ nécessaires respectivement au calcul des matrices de raideur des articulations flexibles et des jambes sont supposés identiques pour chaque jambe i . Les efforts extérieurs $\tilde{\mathbf{P}}_E$ appliqués sur la plate-forme sont supposés connus et sont calculés à partir de la masse de la plate-forme mobile.

$${}^4\mathbf{g}_p = \tilde{\mathbf{P}}_E + \sum_{i=1}^6 \mathbf{M}_i^p \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{b}'}^{i,p} \quad (5.6)$$

Les fonctions d'identification de chaque modèle sont récapitulées dans le tableau 5.1.

n°	Modèle	Fonction d'identification
1	Géométrique	${}^1g_{i,p} = l_i - \ \mathbf{p}^p + \mathbf{R}^p \mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i - \rho_i^p \mathbf{u}_i\ $
2	Cinématique	${}^2\mathbf{g}_p = \boldsymbol{\rho}^p - \boldsymbol{\rho}^0 + \mathbf{J}_0^{-1}(\mathbf{X}^p - \mathbf{X}^0)$
3	Poutre	${}^3g_{i,p} = (l_i - l_{bi} + \Delta l_{A_i}^p + \Delta l_{B_i}^p) - \ \mathbf{p}^p + \mathbf{R}^p \mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i - \rho_i^p \mathbf{u}_i\ $
4	Raideur	${}^4\mathbf{g}_p = \tilde{\mathbf{P}}_E + \sum_{i=1}^6 \mathbf{M}_i^p \tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{b}'}^{i,p}$

TABLE 5.1 – Fonctions d'identification considérées pour l'étalonnage

La position \mathbf{p}^p et l'orientation \mathbf{R}^p de la plate-forme mobile sont extraits des données de photogrammétrie pour chaque pose p . Ce moyen de mesure est cependant coûteux, ce qui limite le nombre N_p de configurations de mesure possible. Afin d'améliorer l'identifiabilité des paramètres, les configurations de mesure doivent être optimisées.

5.3.2 Choix des configurations de mesure

L'optimisation des configurations de mesure s'effectue à partir de la matrice d'identification, qui dépend du modèle considéré. Dans un premier temps, nous avons choisi de considérer le modèle géométrique de (5.2) afin de définir les configurations de mesure (voir le chapitre 3 pour une présentation du choix des configurations de mesure). Nous verrons dans cette section que ce modèle conduit à des configurations de mesure situées pour la plupart en bordure de l'espace de travail. Ce résultat est assez classique [Dan00] et permet dans notre cas de considérer que ces poses peuvent aussi être utilisées pour l'étalonnage des autres modèles du télescope. En effet, les poses situées en bordure de l'espace de travail sont celles pour lesquelles les articulations flexibles sont les plus sollicitées, tant au niveau de leur déformation que des efforts qu'elles génèrent. Ainsi, ce sont aussi les poses pour lesquelles les paramètres additionnels des modèles poutre et raideur sont les plus identifiables.

Les mêmes configurations de mesure photogrammétrique seront donc utilisées pour l'étalonnage de l'ensemble des modèles. Ceci permet d'une part de minimiser le nombre de mesures, et d'autre part de permettre une comparaison plus objective des modèles.

5.3.2.1 Matrice d'identification du modèle géométrique

Avec le modèle géométrique du 6-PUS, la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ nécessaire au choix des configurations de mesure peut être calculée à partir de la fonction d'identification $^1g_{i,p}$ de la i^{eme} jambe pour la pose p . Cependant, nous allons montrer que les paramètres a_i^z , b_i^z et l_i du modèle géométrique ne sont pas identifiables, ou plus précisément que seule une combinaison linéaire de ces trois paramètres peut être identifiée. En effet, différencier $^1g_{i,p}$ par rapport à chacun de ces paramètres permet l'obtention d'une matrice d'identification $\mathbf{G}_{a_i^z, b_i^z, l_i}$ dont la i^{eme} ligne pour la p^{eme} configuration de mesure est donnée en (5.7), avec $\mathbf{h}_{i,p} = \mathbf{p}^p + \mathbf{R}^p \mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i$:

$$(\mathbf{G}_{a_i^z, b_i^z, l_i})_{i,p} = \left[\frac{(\mathbf{h}_{i,p} - \rho_i^p \mathbf{u}_i)^T}{2\sqrt{(\mathbf{h}_{i,p} - \rho_i^p \mathbf{u}_i)^T (\mathbf{h}_{i,p} - \rho_i^p \mathbf{u}_i)}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 & -\mathbf{z}_E^p \\ 1 \end{bmatrix}, 1 \right] \quad (5.7)$$

Nous pouvons alors remarquer que $\mathbf{h}_{i,p} - \rho_i^p \mathbf{u}_i \approx l_i \mathbf{z}_i^p$. Ainsi, $^1g_{i,p}$ peut être réécrite en considérant les erreurs δa_i^z , δb_i^z et δl_i sur les paramètres, telle que :

$$2(^1g_{i,p}) = (\mathbf{z}_i^p)^T \mathbf{z}_0 \delta a_i^z - (\mathbf{z}_i^p)^T \mathbf{z}_E^p \delta b_i^z + \delta l_i \quad (5.8)$$

Étant donné le faible espace de travail en orientation dans lequel évolue le télescope, l'orientation \mathbf{z}_E^p de la plate-forme mobile varie peu ($< 0.3^\circ$) et peut même être approchée par \mathbf{z}_0 en considérant le bruit de mesure. De plus, les jambes ne peuvent pas être orientées d'un angle supérieur à 0.6° par rapport à leur position initiale, ce qui implique que $(\mathbf{z}_i^p)^T \mathbf{z}_E^p \approx (\mathbf{z}_i^p)^T \mathbf{z}_0 \approx \lambda$, avec λ une constante. Avec cette approximation, (5.8) devient :

$$2(^1g_{i,p}) = \lambda \delta a_i^z - \lambda \delta b_i^z + \delta l_i \quad (5.9)$$

Au regard de (5.9), les paramètres a_i^z , b_i^z et l_i n'interviennent donc que sous forme de combinaison linéaire dans les équations d'étalonnage. Ainsi, seul un paramètre sur les trois peut être identifié, les autres devant être fixés à leur valeur nominale. En considérant les incertitudes de fabrication et d'assemblage, nous estimons que l_i est le paramètre dont la valeur est la moins bien estimée. Afin de mener à bien l'étalonnage, nous choisissons donc d'identifier l_i et de fixer a_i^z et b_i^z à leurs valeurs nominales. De plus, l'orientation \mathbf{u}_i des actionneurs est un vecteur unitaire et seulement deux de ses composantes suffisent à le définir entièrement. Le jeu de paramètres à identifier devient donc $\{a_i^x, a_i^y, b_i^x, b_i^y, u_i^x, u_i^y, l_i\}$ pour chaque jambe i . Différencier la fonction d'identification $^1g_{i,p}$ de la i^{eme} jambe pour la pose p par rapport à chacun de ces 7 paramètres permet l'obtention de la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ dont la i^{eme} ligne pour la p^{eme} configuration de mesure est donnée en (5.10) :

$$(\mathbf{G}_\xi)_{i,p} = \left[\frac{(\mathbf{h}_{i,p} - \rho_i^p \mathbf{u}_i)^T}{2\sqrt{(\mathbf{h}_{i,p} - \rho_i^p \mathbf{u}_i)^T (\mathbf{h}_{i,p} - \rho_i^p \mathbf{u}_i)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \rho_i^p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \rho_i^p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 1 \right] \quad (5.10)$$

5.3.2.2 Configurations de mesure optimisées

Avec la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ ainsi obtenue, le choix des configurations de mesure peut être effectué. L'optimisation est réalisée pour $N_p = 40$ configurations en utilisant la fonction *fmincon* de MATLAB permettant de résoudre le problème d'optimisation sous contrainte

décrit en page 41 (voir chapitre 3). Les configurations initiales sont choisies aléatoirement dans l'espace de travail. Les résultats montrent que le choix des configurations initiales a peu d'influence sur la valeur finale de l'indice d'observabilité considéré (O1 dans notre cas) après optimisation. Par contre, les configurations de mesure issues de l'optimisation sont quant à elles sensibles aux configurations initiales, ce qui montre la convergence locale de l'algorithme d'optimisation utilisé. Les configurations de mesure optimisées sont cependant situées pour la plupart en bordure, ou proche de la bordure de l'espace de travail. De plus, nous observons que, pour les configurations de mesure issues de l'optimisation, les valeurs des coordonnées articulaires actionnées sont soit très proches de leur configuration initiale ρ_i^0 , soit très proches de leurs butées. Pour des raisons de clarté, seules ces trois positions sont utilisées pour définir les 40 configurations optimisées, données dans le tableau 5.2. Pour cela, nous introduisons c_{ρ_i} la course maximale normalisée du i^{eme} actionneur telle que $\rho_i = \rho_i^0 + c_{\rho_i}|\rho_i^{\max} - \rho_i^0|$, avec $\rho_i^0 = (\rho_i^{\max} + \rho_i^{\min})/2$. Ainsi, c_{ρ_i} peut prendre trois valeurs : 0 pour définir la position initiale ρ_i^0 ou ± 1 pour les positions de butée. Définir les configurations de mesure issues de l'optimisation seulement par l'intermédiaire de ces trois positions ne modifie pas - ou très peu - la valeur de l'indice d'observabilité considéré O1. Le tableau 5.3 répertorie quant à lui les 6 poses additionnelles de vérification choisies aléatoirement dans l'espace de travail.

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_{ρ_1}	1	1	0	1	1	0	1	1	-1	-1
c_{ρ_2}	-1	0	1	1	1	0	1	-1	-1	1
c_{ρ_3}	-1	1	-1	0	1	-1	0	-1	-1	-1
c_{ρ_4}	1	1	-1	-1	0	-1	0	0	0	0
c_{ρ_5}	1	1	0	-1	-1	1	0	-1	-1	-1
c_{ρ_6}	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
n°	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
c_{ρ_1}	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	0	-1
c_{ρ_2}	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
c_{ρ_3}	-1	0	-1	0	0	1	1	1	1	1
c_{ρ_4}	1	1	-1	0	-1	-1	1	0	-1	0
c_{ρ_5}	-1	1	1	0	0	1	-1	-1	1	-1
c_{ρ_6}	0	-1	-1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1
n°	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
c_{ρ_1}	1	-1	1	0	1	-1	-1	-1	-1	1
c_{ρ_2}	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1
c_{ρ_3}	0	0	1	1	-1	1	-1	1	1	0
c_{ρ_4}	1	0	-1	-1	1	0	-1	0	-1	-1
c_{ρ_5}	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	0	1
c_{ρ_6}	1	1	-1	1	1	0	1	-1	1	1
n°	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
c_{ρ_1}	1	0	1	-1	-1	0	1	1	-1	1
c_{ρ_2}	1	1	1	1	1	0	0	1	0	-1
c_{ρ_3}	0	-1	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
c_{ρ_4}	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1
c_{ρ_5}	0	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
c_{ρ_6}	1	1	0	-1	0	-1	1	-1	-1	1

TABLE 5.2 – Les 40 configurations de mesure optimisées, avec $\rho_i = \rho_i^0 + c_{\rho_i}|\rho_i^{\max} - \rho_i^0|$

Comme annoncé précédemment, la plupart des configurations de mesure optimisées se situent en bordure, ou proches de la bordure de l'espace de travail du télescope. Ainsi, ces

n°	1	2	3	4	5	6
c_{ρ_1}	-0.5	0.5	0.5	-0.5	0.5	-0.5
c_{ρ_2}	0	1	0	0.5	1	0
c_{ρ_3}	-1	0	0	-1.0	-0.5	0
c_{ρ_4}	0	1	0	0.5	0.5	1
c_{ρ_5}	0	1	1	0	1	0.5
c_{ρ_6}	-0.5	0.5	-0.5	0	0.5	0

TABLE 5.3 – Les 6 configurations de vérification, avec $\rho_i = \rho_i^0 + c_{\rho_i} |\rho_i^{\max} - \rho_i^0|$

configurations peuvent convenir pour l'étalonnage de tous les modèles développés puisqu'elles sollicitent les articulations flexibles. Afin de minimiser l'influence des sources d'erreur non-géométriques non considérées dans la modélisation du télescope, les mesures de photogrammétrie ont été réalisées en salle blanche. La température et l'humidité sont donc constantes tout au long du processus d'étalonnage. Les résultats d'étalonnage pour chacun des modèles sont donnés dans la section suivante.

5.4 Étalonnage à partir de la pose de la plate-forme mobile

Dans cette section, seule la position et l'orientation de la plate-forme mobile sont extraites des données de photogrammétrie. L'identification des paramètres est réalisée en considérant les fonctions d'identification de la section 5.3 avec la fonction *lsqnonlin* de MATLAB. Les mêmes résultats sont obtenus en considérant les méthodes de Gauss-Newton et de Levenberg-Marquardt. Des essais ont montré que pour notre cas les résultats des algorithmes n'étaient pas sensibles au choix des valeurs initiales des paramètres. Cela ne garantit pas l'obtention d'un minimum global, ce qu'aurait pu fournir une méthode d'analyse par intervalles, mais permet de s'affranchir de l'influence des conditions initiales.

Les résultats d'étalonnage sont donnés en terme de précision finale obtenue sur les poses d'étalonnage et de vérification en considérant chacun des modèles (géométrique, cinématique, poutre, raideur) sans prise en compte de la déformation de la plate-forme mobile, puis avec les modèles *découplé* et *couplé* respectivement. Les résultats obtenus sont ensuite comparés et analysés pour tous les modèles en section 5.4.4.

5.4.1 Sans prise en compte de la déformation de la plate-forme

Afin d'observer l'influence de la prise en compte de la déformation de la plate-forme mobile sur les résultats d'étalonnage avec les modèles *découplé* et *couplé* développés précédemment, l'étalonnage du télescope est tout d'abord réalisé avec chacun des modèles géométriques, sans prendre en compte cette déformation. Dans les fonctions d'identification (5.2), (5.4), (5.5) et (5.6), la relation $\mathbf{b}_i^* = \mathbf{b}_i$ est donc considérée.

L'analyse de l'identifiabilité des paramètres est d'abord réalisée pour chaque modèle. Les résultats d'étalonnage sont donnés en tableau 5.4 en terme de distances entre les valeurs nominales et les valeurs identifiées des paramètres et en figure 5.1 en terme d'erreur en position et en orientation du positionnement de la plate-forme mobile après étalonnage sur les poses d'étalonnage et de vérification.

5.4.1.1 Pour le modèle géométrique

L'étalonnage expérimental confirme que seulement un paramètre parmi $\{a_i^z, b_i^z, l_i\}$ peut être identifié. En effet, la prise en compte de l'ensemble de ces paramètres lors de l'identification génère deux valeurs singulières de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$ inférieures à 10^{-8} (à comparer à la plus petite valeur singulière de 10^{-4} si un seul des paramètres parmi $\{a_i^z, b_i^z, l_i\}$ est identifié) et une décomposition QR de la matrice d'identification montre que ces valeurs singulières sont associées à deux de ces paramètres.

En ce qui concerne l'orientation des actionneurs \mathbf{u}_i , seulement une de ces composantes peut être identifiée, quelle que soit la paramétrisation utilisée. De plus, le choix de la composante à identifier n'influe pas sur les résultats d'étalonnage : les mêmes résultats sont obtenus en identifiant u_i^x ou u_i^y . Étant donné que le calcul du modèle géométrique direct (comme inverse) nécessite la connaissance totale de l'orientation \mathbf{u}_i des actionneurs, il n'est pas intéressant d'identifier une combinaison des deux composantes u_i^x et u_i^y (par exemple $\sqrt{u_i^{x2} + u_i^{y2}}$), et un choix de la composante à identifier doit être effectué. Nous avons donc arbitrairement choisi d'identifier u_i^x et de fixer u_i^y à sa valeur nominale $u_i^y = 0$. À partir de la connaissance de ces deux composantes, u_i^z peut être facilement calculée puisque \mathbf{u}_i est un vecteur unitaire. Le jeu de paramètres à identifier est donc réduit à $\{a_i^x, a_i^y, b_i^x, b_i^y, u_i^x, l_i\}$, tandis que a_i^z, b_i^z et u_i^y sont fixés à 0, leur valeur nominale.

5.4.1.2 Pour le modèle cinématique

Étant donné que le modèle cinématique est issu de la modélisation géométrique, les mêmes problèmes d'identifiabilité des paramètres apparaissent. Cependant, puisque le fait que le télescope évolue dans un faible espace de travail a été pris en compte pour l'élaboration du modèle cinématique, l'analyse de l'identifiabilité des paramètres peut être directement réalisée à partir de la forme de la matrice jacobienne. En effet, chaque ligne de la matrice jacobienne ne prend en compte que l'orientation initiale de la i^{eme} jambe \mathbf{z}_i^0 , la position du point \mathbf{b}_i et le produit scalaire $\mathbf{u}_i^T \mathbf{z}_i^0$ entre l'orientation des actionneurs et des jambes pour la position initiale \mathbf{X}^0 de la plate-forme mobile. Ainsi, pour chaque jambe, si \mathbf{b}_i est identifié, seulement a_i^x et a_i^y peuvent être identifiés en considérant l'orientation initiale des jambes \mathbf{z}_i^0 . Ensuite, seulement une seule information n'a pas encore été utilisée dans $\mathbf{u}_i^T \mathbf{z}_i^0$, et donc une seule composante de \mathbf{u}_i peut être identifiée.

Étant donné que b_i^z et l_i sont liés dans les équations d'étalonnage, nous choisissons d'identifier l_i au lieu de b_i^z dans un souci de comparaison avec les résultats d'étalonnage du modèle géométrique. En ce qui concerne l'orientation \mathbf{u}_i des actionneurs, les mêmes constatations ont pu être observées qu'avec le modèle géométrique : modifier la paramétrisation ou la composante de \mathbf{u}_i à identifier n'influence en rien les résultats d'étalonnage. Finalement, l'identification de la position initiale \mathbf{X}^0 de la plate-forme mobile par l'intermédiaire des positions initiales $\boldsymbol{\rho}_0$ des actionneurs ne modifie pas les résultats d'étalonnage. De plus, ces paramètres semblent être faiblement identifiables puisque l'identification de $\boldsymbol{\rho}_0$ conduit à 6 valeurs singulières de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$ inférieures à 10^{-14} , tandis que la plus petite valeur singulière de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$ lorsque les $\boldsymbol{\rho}_0$ ne sont pas identifiés est de 10^{-4} . Ainsi, le jeu des paramètres à identifier devient $\{a_i^x, a_i^y, b_i^x, b_i^y, u_i^x, l_i\}$ pour chaque jambe i , identique à celui du modèle géométrique.

5.4.1.3 Pour le modèle poutre

À cause de la faible variation d'orientation $\delta \leq 1^\circ$ des articulations flexibles sur l'espace de travail, les variations de Δl_{A_i} et Δl_{B_i} sont inférieures à $0.3\mu\text{m}$ comme le montre la figure 4.16 en page 69. Nous avons vu précédemment que la précision obtenue sur la pose de la plate-forme mobile obtenue avec l'algorithme d'Haralick était du même ordre de grandeur que le bruit de mesure photogrammétrique, soit $3\mu\text{m}$. En considérant une erreur de $3\mu\text{m}$ sur la position \mathbf{p}^p de la plate-forme en la pose p dans la fonction d'identification ${}^3g_{i,p}$ rappelée ci-dessous, Δl_{A_i} et Δl_{B_i} ne peuvent pas être correctement identifiés. Le jeu de paramètres identifiables est donc toujours identique à celui du modèle géométrique, et β_i et l_{bi} sont fixés à leurs valeurs nominales.

$${}^3g_{i,p} = (l_i - l_{bi} + \Delta l_{A_i}^p + \Delta l_{B_i}^p) - \|\mathbf{p}^p + \mathbf{R}^p \mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i - \rho_i^p \mathbf{u}_i\| \quad (5.11)$$

5.4.1.4 Pour le modèle de raideur

Les équations d'équilibre statique font intervenir les efforts $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{b}}^i$, s'appliquant aux points \mathbf{b}'_i (voir page 71 pour un rappel des notations). Ces efforts sont fonction des déplacements $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}}^i$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}^i$, comme le montre (4.32). Les points \mathbf{b}'_i et \mathbf{a}'_i étant respectivement fonction de \mathbf{b}_i et $(\mathbf{a}_i + \rho_i \mathbf{u}_i)$, la position des points \mathbf{b}_i et \mathbf{a}_i devrait être identifiable. Cependant, a_i^z , b_i^z et l_i sont liés dans les équations d'étalonnage et donc seulement l_i sera identifié. L'information supplémentaire dans $(\mathbf{a}_i + \rho_i \mathbf{u}_i)$ sera utilisée pour l'identification de u_i^x . L'expérience montre aussi qu'aucun des paramètres de raideur ne peut être identifié (la plus petite valeur propre de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$ passant de 10^3 à 10^{-8} dans ce cas). Le jeu de paramètres identifiables reste donc : $\{a_i^x, a_i^y, b_i^x, b_i^y, u_i^x, l_i\}$.

Pour tous les modèles, les résultats d'étalonnage photogrammétrique sont donnés dans le tableau 5.4 en terme de distances entre les valeurs nominales et identifiées des paramètres et dans la figure 5.1 en terme d'erreur en position et en orientation du positionnement de la plate-forme mobile après étalonnage sur les poses d'étalonnage et de vérification. L'erreur en position est la distance entre les positions mesurée et calculée avec les modèles du centre de la plate-forme mobile. L'erreur en orientation est l'angle entre les orientations mesurée et calculée avec les modèles du repère \mathcal{F}_E attaché à la plate-forme mobile, en définissant la rotation comme un angle autour d'un axe unitaire. Chaque barre a la taille de l'erreur maximale commise sur l'ensemble des configurations de mesure considérées et la barre additionnelle représente la valeur moyenne des erreurs. Pour les poses de vérification, les valeurs des erreurs maximale et moyenne sont explicitement fournies. Le modèle initial tient lieu de référence : c'est le modèle géométrique du 6-PUS avec les valeurs nominales des paramètres.

La figure 5.1 montre que tous les modèles améliorent la précision finale du télescope après étalonnage, que ce soit en terme de position ou d'orientation. De plus, des résultats similaires en terme de précision finale sont obtenus pour les modèles géométrique, cinématique et poutre. Ceci s'explique par le fait que le modèle cinématique est une bonne approximation du modèle géométrique grâce au faible espace de travail du télescope, et que la prise en compte de la déformation des articulations flexibles avec un modèle poutre n'améliore pas sensiblement les résultats puisque la différence de déplacement de l'extrémité d'une articulation flexible

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	0.98	-0.23	-2.72	-2.31	0.37	4.42	1.33	0.09	-2.46	-3.32	0.90	3.31
δa_i^y	2.62	2.57	-2.55	-1.97	-1.76	-2.42	3.25	3.36	-2.18	-2.40	-2.56	-2.53
δb_i^x	3.59	0.73	-0.09	2.45	-3.67	-0.49	3.75	0.48	-0.85	1.79	-3.15	0.13
δb_i^y	-1.38	-0.88	4.22	1.39	-0.02	3.04	-0.79	-0.08	5.35	2.38	-0.26	2.73
δu_i^x	-0.07	0.05	0.10	-0.06	0.05	-0.15	-0.09	0.07	0.12	-0.07	0.07	-0.17
δl_i	0.95	0.07	1.53	0.50	0.63	1.22	0.95	0.24	1.78	0.38	0.58	1.29

(a) Pour le modèle géométrique

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	0.99	-0.25	-2.73	-2.31	0.36	4.43	-0.40	0.22	0.87	-2.64	0.55	4.18
δa_i^y	2.60	2.57	-2.57	-1.98	-1.78	-2.44	2.14	2.45	-2.73	-0.20	0.29	-2.97
δb_i^x	3.58	0.73	-0.09	2.45	-3.66	-0.50	3.05	0.14	1.46	4.02	-4.85	0.31
δb_i^y	-1.36	-0.86	4.25	1.41	0.00	3.06	-2.72	-1.23	5.91	3.57	0.50	3.95
δu_i^x	-0.07	0.05	0.10	-0.06	0.05	-0.15	-0.05	0.05	-0.05	-0.02	0.03	-0.17
δl_i	0.94	0.06	1.54	0.50	0.62	1.23	1.15	0.31	1.95	0.68	1.05	1.64

(b) Pour le modèle cinématique

(c) Pour le modèle poutre

(d) Pour le modèle de raideur

TABLE 5.4 – Distances (en mm) entre les valeurs nominales et identifiées des paramètres des 4 modèles géométriques sans prise en compte de la déformation de la plate-forme mobile

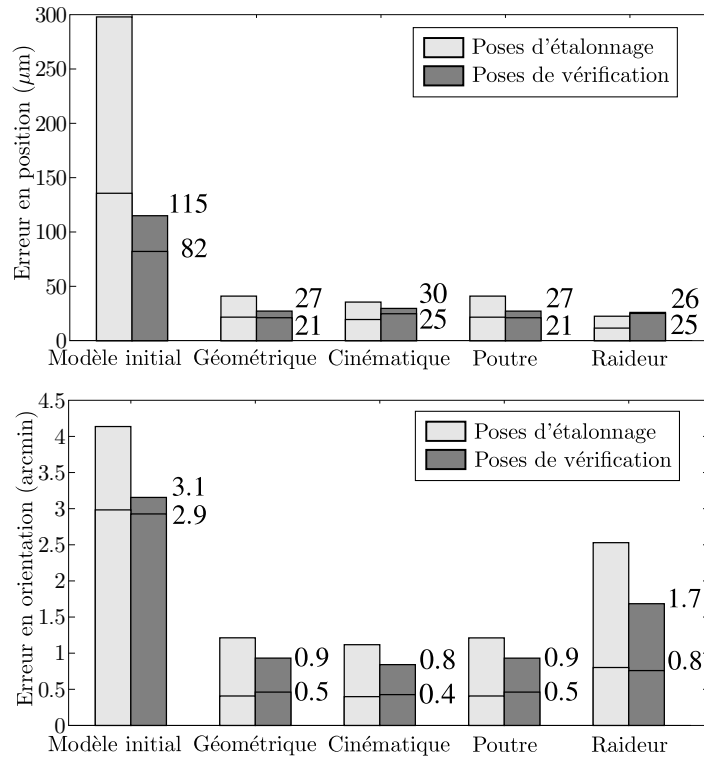


FIGURE 5.1 – Erreur en position et en orientation du positionnement de la plate-forme mobile après étalonnage sur les poses d'étalonnage et de vérification pour les 4 modèles géométriques sans prise en compte de la déformation de la plate-forme mobile. Les erreurs moyennes et maximales sont explicitement données pour les poses de vérification.

entre un modèle poutre et une rotule parfaite est au maximum de $0.3\mu\text{m}$ comme le montre la figure 4.16, négligeable par rapport au bruit de mesure. En ce qui concerne le modèle de raideur, la prise en compte de l'équilibre statique de la plate-forme semble détériorer les résultats en terme d'erreurs en orientation. Notons tout d'abord que l'importante raideur des articulations flexibles dans la direction des jambes génère des efforts de 30N pour une erreur de $3\mu\text{m}$ (à mettre en comparaison aux efforts d'une centaine de Newton calculés avec le modèle de raideur). Cette sensibilité du modèle de raideur aux erreurs de mesure va bien sûr affecter la précision finale obtenue après étalonnage. Il est cependant intéressant de savoir pourquoi les erreurs de mesure influencent principalement les erreurs en orientation pour le modèle de raideur. Pour cela, nous introduisons un facteur d'échelle λ afin de pouvoir gérer l'influence des moments par rapport aux efforts dans la fonction d'identification ${}^4\mathbf{g}_p$ de (5.6) du modèle de raideur, et donc intrinsèquement de modifier l'influence des paramètres d'orientation et de position dans cette fonction. Pour cette étude, la fonction d'identification ${}^\lambda\mathbf{g}_p$ peut être définie comme :

$${}^\lambda\mathbf{g}_p = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_E \\ \lambda\tilde{\mathbf{M}}_E \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^6 \mathbf{M}_i^p \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}'}^{i,p} \\ \lambda\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{b}'}^{i,p} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

avec $\tilde{\mathbf{F}}_E$ et $\tilde{\mathbf{M}}_E$ respectivement les vecteurs des efforts et des moments extérieurs appliqués sur la plate-forme exprimés dans le repère \mathcal{F}_E , $\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}'}^{i,p}$ et $\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{b}'}^{i,p}$ respectivement les vecteurs des efforts et des moments appliqués par les articulations flexibles sur la plate-forme exprimés dans le repère \mathcal{F}_E , et \mathbf{M}_i^p une matrice 6×6 prenant en compte le transport des moments (voir section 4.5.4).

En considérant la fonction d'identification ${}^\lambda\mathbf{g}_p$ de (5.12), l'étalonnage est réalisé avec les données de photogrammétrie pour le modèle de raideur, pour plusieurs valeurs du facteur d'échelle λ . Les résultats sont donnés dans la figure 5.2 en terme d'erreur en position et en orientation du positionnement de la plate-forme après étalonnage sur les poses de vérification.

L'analyse de la figure 5.2 montre que la valeur du facteur d'échelle λ modifie les résultats d'étalonnage, et change notamment la répartition des erreurs en position et en orientation. Par exemple, pour $\lambda = 1\text{m}^{-1}$, l'erreur en position est privilégiée par rapport à l'erreur en orientation. À l'inverse, pour $\lambda = 50\text{m}^{-1}$, c'est l'erreur en orientation qui est privilégiée au détriment de celle en position. Ce phénomène est connu lors d'un processus d'étalonnage : il fait référence à la normalisation de la matrice jacobienne d'identification présentée dans le chapitre 3. L'étude de l'influence du facteur d'échelle λ sur les résultats d'étalonnage est néanmoins complexe et ne sera pas traitée dans cette thèse. Toutefois, nous pouvons noter qu'une valeur de $\lambda < 0.5\text{m}^{-1}$ permet de diminuer sensiblement l'erreur en orientation quasiment sans dégradation de l'erreur en position. Par ailleurs, la meilleure précision de positionnement en terme d'erreur en position, erreur la plus critique dans notre cas au regard des spécifications du télescope à atteindre du tableau 4.1 de la page 56, est atteinte pour $\lambda = 1\text{m}^{-1}$, ce qui correspond à la fonction d'identification ${}^4\mathbf{g}_p$ de (5.6) utilisée précédemment. C'est donc cette fonction d'identification qui sera considérée pour le modèle de raideur dans la suite de ce document.

En ce qui concerne la valeur des paramètres identifiés pour l'ensemble des modèles, donnée dans le tableau 5.4, celle-ci présente un écart par rapport à leur valeur nominale bien plus important que ce à quoi nous aurions pu nous attendre en considérant les erreurs de fabrication

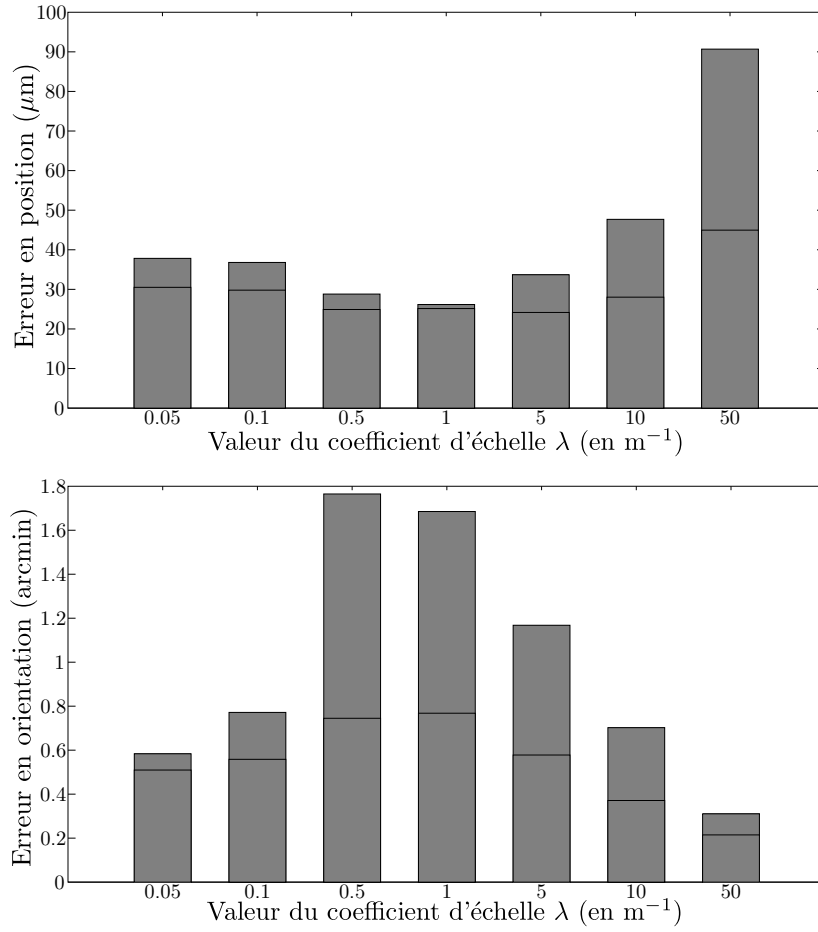


FIGURE 5.2 – Erreur en position et en orientation du positionnement de la plate-forme mobile après étalonnage sur les poses de vérification pour le modèle de raideur sans prise en compte de la déformation de la plate-forme mobile, en fonction du coefficient d'échelle λ .

et d'assemblage. Les déviations les plus importantes sont obtenues pour l'orientation des actionneurs : certaines valeurs de u_i^x sont de l'ordre de 0.15, ce qui signifierait un défaut d'orientation de presque 10° des actionneurs. Ces déviations trouvent leur explication en analysant les résultats d'étalonnage avec le *modèle découplé* pour la déformation de la plate-forme mobile.

5.4.2 Avec le modèle découplé de déformation de la plate-forme

Dans cette partie, la déformation de la plate-forme mobile est prise en compte par l'intermédiaire du *modèle découplé* de (4.1). La relation $\mathbf{b}_i^* = \mathbf{b}_i + \kappa_i(\rho_i - \rho_i^0)\mathbf{z}_o$ est donc considérée pour les fonctions d'identification (5.2), (5.4), (5.5) et (5.6).

Pour tous les modèles, les mêmes problèmes que précédemment sur l'identifiabilité des paramètres apparaissent. Cependant, le coefficient κ_i doit aussi pouvoir être identifié pour chaque jambe i . Nous allons montrer que κ_i et u_i^x ne peuvent pas être tous deux identifiés.

Considérons tout d'abord la fonction d'identification ${}^1g_{i,p}$ du modèle géométrique de (5.2),

avec le *modèle découplé* pour la déformation de la plate-forme mobile :

$${}^1g_{i,p} = l_i - \|\mathbf{p}^p + \mathbf{R}^p(\mathbf{b}_i + \kappa_i(\rho_i^p - \rho_i^0)\mathbf{z}_o) - \mathbf{a}_i - \rho_i^p \mathbf{u}_i\| \quad (5.13)$$

Étant donné le faible espace de travail dans lequel évolue le télescope, l'orientation de la plate-forme mobile varie peu et approcher $\mathbf{R}^p(\kappa_i(\rho_i^p - \rho_i^0)\mathbf{z}_o)$ par $(\kappa_i(\rho_i^p - \rho_i^0)\mathbf{z}_o)$ génère des erreurs de moins de $1\mu\text{m}$ sur l'ensemble des configurations de mesure. De plus, en fixant les orientations des actionneurs \mathbf{u}_i à leur valeur nominale \mathbf{z}_o , (5.13) peut s'écrire :

$${}^1g_{i,p} = l_i - \|\mathbf{p}^p + \mathbf{R}^p \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i - \rho_i^p \mathbf{u}_i + \kappa_i(\rho_i^p - \rho_i^0)\mathbf{u}_i\| \quad (5.14)$$

En analysant le terme $-\rho_i^p \mathbf{u}_i + \kappa_i(\rho_i^p - \rho_i^0)\mathbf{u}_i$ et en fixant par exemple la position de référence $\rho_i^0 = 0$ des actionneurs (ce qui peut être effectué par un simple changement de coordonnées selon \mathbf{z}_o des points A_i), ce terme devient $\rho_i^p(\kappa_i - 1)\mathbf{u}_i$. Les coefficients κ_i et u_i^x sont alors couplés dans les équations d'étalonnage et leurs variations n'apparaissent que sous forme de combinaison linéaire lors de l'identification. De plus, il est possible d'intuiter que l'identification de la déformation de la plate-forme mobile sous la forme d'un *modèle découplé* peut aussi être prise en compte directement dans l'identification de \mathbf{u}_i . En effet, en ne considérant pas la déformation de la plate-forme mobile, la fonction d'identification s'écrit, avec \mathbf{u}'_i une orientation différente pour les actionneurs :

$${}^1g_{i,p} = l_i - \|\mathbf{p}^p + \mathbf{R}^p \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i - \rho_i^p \mathbf{u}'_i\| \quad (5.15)$$

La figure 5.3 montre qu'il est alors possible de satisfaire les équations de fermeture géométrique en jouant sur l'orientation de \mathbf{u}'_i . Considérons pour cette figure $\rho_i^0 = 0$ et $\rho_i > 0$. La déformation de la plate-forme mobile implique que le point B_i est en réalité en B_i^* . Cependant, si la déformation de la plate-forme n'est pas modélisée, c'est le point B_i qui est considéré dans les équations d'étalonnage. La fonction d'identification ${}^1g_{i,p}$ impose alors que $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{b}_i\| = l_i$, cette condition étant représentée par un arc de cercle pointillé de centre B_i et de rayon l_i . De plus, \mathbf{u}_i étant un vecteur unitaire, nous avons aussi la condition $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i\| = \rho_i$ représentée par un arc de cercle pointillé de centre A_i et de rayon ρ_i . D'après la figure 5.3, nous pouvons observer que ces deux conditions peuvent être vérifiées en considérant une orientation $\mathbf{u}'_i \neq \mathbf{u}_i$ des actionneurs.

Ainsi, l'identification de u_i^x lors de l'étalonnage précédent permettait en réalité d'approcher la déformation de la plate-forme mobile. Dans cette partie, l'étalonnage est réalisé en considérant le *modèle découplé* de déformation. L'identification de κ_i et u_i^x n'étant pas possible, seule κ_i sera identifiée. Ceci permet de fixer les orientations \mathbf{u}_i des actionneurs à leur valeur nominale \mathbf{z}_o et de pouvoir prendre en compte la déformation de la plateforme mobile directement dans la longueur ρ_i des actionneurs comme le montre (5.14). La commande du télescope est alors simplifiée et se rapproche d'une commande classique. Les résultats d'étalonnage sont donnés dans le tableau 5.5 et la figure 5.4.

Il est intéressant de remarquer que les mêmes résultats sont obtenus pour tous les modèles en ne considérant pas la déformation de la plate-forme mobile ou en la prenant en compte avec le *modèle découplé*. Ceci est dû au fait que l'identification de u_i^x permet d'approcher la déformation de la plate-forme, comme expliqué précédemment. En ce qui concerne les valeurs des paramètres identifiés, celles-ci sont semblables dans les deux cas comme le montre les

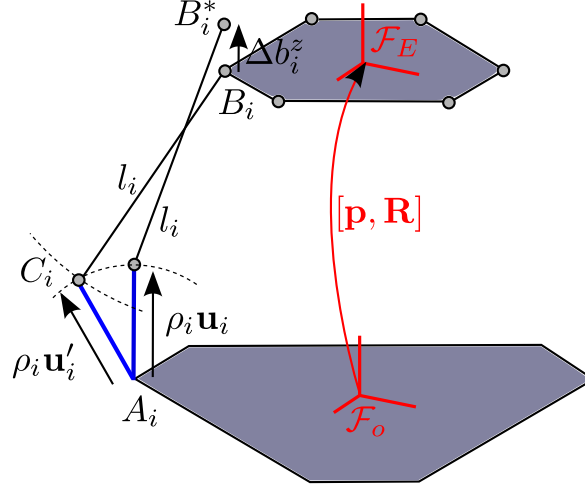


FIGURE 5.3 – Schéma représentant la prise en compte de la déformation de la plate-forme mobile dans l'orientation des actionneurs

tableaux 5.4 et 5.5. Cependant, les valeurs identifiées restent assez éloignées de leurs valeurs nominales par rapport aux erreurs de fabrication et d'assemblage. En considérant le *modèle couplé* pour la déformation de la plate-forme, nous verrons que ces déviations ne sont pas seulement imputables aux erreurs de fabrication et d'assemblage mais principalement dues à la déformation de la plate-forme mobile qui est prise en compte par l'algorithme d'étalonnage à travers un ajustement de la valeur des paramètres identifiés.

5.4.3 Avec le modèle couplé de déformation de la plate-forme

La déformation de la plate-forme mobile est approchée par le *modèle couplé* de déformation de (4.2). La relation $\mathbf{b}_i^* = \mathbf{b}_i + \mathbf{k}_i(\boldsymbol{\rho}^p - \boldsymbol{\rho}^0)\mathbf{z}_o$ est donc considérée pour les fonctions d'identification (5.2), (5.4), (5.5) et (5.6), avec \mathbf{k}_i la i^{eme} ligne de la matrice \mathbf{K} .

Comme pour le *modèle couplé*, \mathbf{k}_i et u_i^x ne peuvent pas être tous deux identifiés. De plus, fixer u_i^x à sa valeur nominale ne permet l'identification que d'un seul des termes de \mathbf{k}_i . Des essais ont montré que les meilleurs résultats d'étalonnage sont obtenus en identifiant les termes diagonaux de \mathbf{K} , ce qui peut se rapprocher de l'identification des κ_i pour le *modèle découplé*. Seuls les termes diagonaux de \mathbf{K} sont donc identifiés. Ils sont désignés par κ_i dans le tableau 5.6 en référence au *modèle découplé* et les résultats sont donnés en figure 5.5.

Les résultats en terme de précision finale obtenue après étalonnage sont donnés en figure 5.5. Nous pouvons d'ores et déjà remarquer qu'en considérant les valeurs nominales du modèle (modèle initial dans la figure 5.5) et le *modèle couplé* de déformation, la précision est améliorée avant étalonnage. Après étalonnage, les résultats obtenus en terme d'erreur de position sont similaires aux précédents étalonnages. Par contre, la prise en compte d'un modèle de déformation *couplé* permet l'obtention de meilleurs résultats en terme d'orientation de la plate-forme mobile par rapport à la base, résultats inférieurs aux spécifications du tableau 4.1 de 0.05° (3arcmin). Afin de choisir le modèle le plus convenable dans le cas du télescope, les résultats d'étalonnage sont analysés dans la section suivante pour tous les modèles.

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	0.32	0.29	-1.74	-2.93	0.89	2.95	1.43	-0.01	-2.57	-3.33	0.93	3.42
δa_i^y	2.66	2.60	-2.54	-1.99	-1.71	-2.40	3.30	3.45	-2.15	-2.48	-2.63	-2.51
δb_i^x	3.59	0.72	-0.09	2.43	-3.72	-0.44	3.79	0.44	-0.94	1.74	-3.10	0.22
δb_i^y	-1.34	-0.87	4.24	1.40	0.01	3.02	-0.68	0.04	5.33	2.34	-0.30	2.69
δl_i	0.91	0.05	1.48	0.48	0.62	1.11	0.70	0.03	1.64	0.19	0.41	1.05
$10^3 \delta \kappa_i$	7.10	1.60	-0.61	1.62	-0.72	6.48	13.14	7.94	3.10	5.37	4.47	11.57

(a) Pour le modèle géométrique

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	0.32	0.28	-1.74	-2.93	0.88	2.95	-0.91	0.75	0.60	-2.83	0.84	2.63
δa_i^y	2.65	2.59	-2.55	-2.00	-1.73	-2.42	2.16	2.47	-2.78	-0.21	0.26	-2.92
δb_i^x	3.59	0.71	-0.09	2.43	-3.72	-0.43	3.03	0.13	1.61	4.03	-4.83	0.44
δb_i^y	-1.32	-0.84	4.26	1.42	0.04	3.04	-2.74	-1.18	5.91	3.60	0.46	3.98
δl_i	0.91	0.05	1.49	0.47	0.61	1.12	1.13	0.29	1.95	0.67	1.04	1.50
$10^3 \delta \kappa_i$	7.11	1.64	-0.60	1.63	-0.69	6.51	2.61	2.01	-13.57	-7.48	-5.58	11.65

(b) Pour le modèle cinématique

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	0.32	0.28	-1.74	-2.93	0.88	2.95	-0.91	0.75	0.60	-2.83	0.84	2.63
δa_i^y	2.65	2.59	-2.55	-2.00	-1.73	-2.42	2.16	2.47	-2.78	-0.21	0.26	-2.92
δb_i^x	3.59	0.71	-0.09	2.43	-3.72	-0.43	3.03	0.13	1.61	4.03	-4.83	0.44
δb_i^y	-1.32	-0.84	4.26	1.42	0.04	3.04	-2.74	-1.18	5.91	3.60	0.46	3.98
δl_i	0.91	0.05	1.49	0.47	0.61	1.12	1.13	0.29	1.95	0.67	1.04	1.50
$10^3 \delta \kappa_i$	7.11	1.64	-0.60	1.63	-0.69	6.51	2.61	2.01	-13.57	-7.48	-5.58	11.65

(c) Pour le modèle poutre

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	0.32	0.28	-1.74	-2.93	0.88	2.95	-0.91	0.75	0.60	-2.83	0.84	2.63
δa_i^y	2.65	2.59	-2.55	-2.00	-1.73	-2.42	2.16	2.47	-2.78	-0.21	0.26	-2.92
δb_i^x	3.59	0.71	-0.09	2.43	-3.72	-0.43	3.03	0.13	1.61	4.03	-4.83	0.44
δb_i^y	-1.32	-0.84	4.26	1.42	0.04	3.04	-2.74	-1.18	5.91	3.60	0.46	3.98
δl_i	0.91	0.05	1.49	0.47	0.61	1.12	1.13	0.29	1.95	0.67	1.04	1.50
$10^3 \delta \kappa_i$	7.11	1.64	-0.60	1.63	-0.69	6.51	2.61	2.01	-13.57	-7.48	-5.58	11.65

(d) Pour le modèle de raideur

TABLE 5.5 – Distances entre les valeurs nominales et identifiées des paramètres des 4 modèles géométriques avec le modèle découplé de la déformation de la plate-forme mobile (en mm hormis pour $\delta \kappa_i$ qui est sans dimension)

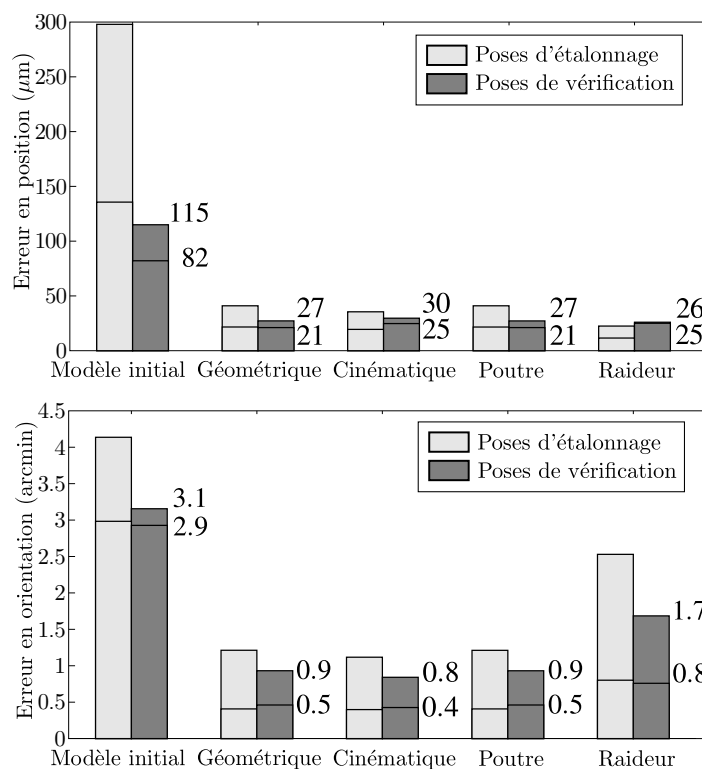


FIGURE 5.4 – Erreur en position et en orientation du positionnement de la plate-forme mobile après étalonnage sur les poses d'étalonnage et de vérification pour les 4 modèles géométriques avec le modèle découplé de la déformation de la plate-forme mobile. Les erreurs moyennes et maximales sont explicitement données pour les poses de vérification.

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	-1.71	0.41	0.30	-1.58	-0.18	-0.34	-0.58	0.11	-0.52	-1.99	-0.13	0.15
δa_i^y	-0.33	-0.21	-2.12	0.37	0.98	-2.62	0.34	0.63	-1.72	-0.11	0.06	-2.70
δb_i^x	0.56	1.91	0.04	0.41	-1.82	-0.32	0.77	1.64	-0.82	-0.26	-1.20	0.36
δb_i^y	-0.19	-0.21	2.25	1.46	0.61	-0.22	0.48	0.70	3.34	2.41	0.30	-0.53
δl_i	0.37	-0.45	1.02	0.25	0.43	0.58	0.16	-0.47	1.17	-0.04	0.23	0.52
$10^3 \delta \kappa_i$	9.58	1.98	4.43	3.33	0.67	6.99	15.77	8.25	8.16	7.02	5.93	12.13

(a) Pour le modèle géométrique

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	-2.77	0.62	0.94	-1.50	-0.18	-1.30	-0.82	-0.72	0.93	-1.64	-0.00	1.63
δa_i^y	-1.13	-0.42	-2.37	0.83	1.02	-2.88	1.08	0.19	-1.49	-0.46	0.69	-2.74
δb_i^x	0.21	1.98	0.53	0.74	-1.87	-1.16	0.49	1.41	0.06	0.38	-0.83	2.15
δb_i^y	-1.39	-0.42	2.38	1.77	0.70	0.11	0.98	1.30	3.07	2.13	0.45	-0.37
δl_i	0.56	-0.42	1.12	0.31	0.43	0.72	0.17	-0.68	1.08	0.00	0.26	0.58
$10^3 \delta \kappa_i$	1.03	0.14	0.51	0.59	0.50	0.81	15.89	12.00	0.53	3.90	6.91	21.19

(b) Pour le modèle cinématique

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	-2.77	0.62	0.94	-1.50	-0.18	-1.30	-0.82	-0.72	0.93	-1.64	-0.00	1.63
δa_i^y	-1.13	-0.42	-2.37	0.83	1.02	-2.88	1.08	0.19	-1.49	-0.46	0.69	-2.74
δb_i^x	0.21	1.98	0.53	0.74	-1.87	-1.16	0.49	1.41	0.06	0.38	-0.83	2.15
δb_i^y	-1.39	-0.42	2.38	1.77	0.70	0.11	0.98	1.30	3.07	2.13	0.45	-0.37
δl_i	0.56	-0.42	1.12	0.31	0.43	0.72	0.17	-0.68	1.08	0.00	0.26	0.58
$10^3 \delta \kappa_i$	1.03	0.14	0.51	0.59	0.50	0.81	15.89	12.00	0.53	3.90	6.91	21.19

(c) Pour le modèle poutre

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	-2.77	0.62	0.94	-1.50	-0.18	-1.30	-0.82	-0.72	0.93	-1.64	-0.00	1.63
δa_i^y	-1.13	-0.42	-2.37	0.83	1.02	-2.88	1.08	0.19	-1.49	-0.46	0.69	-2.74
δb_i^x	0.21	1.98	0.53	0.74	-1.87	-1.16	0.49	1.41	0.06	0.38	-0.83	2.15
δb_i^y	-1.39	-0.42	2.38	1.77	0.70	0.11	0.98	1.30	3.07	2.13	0.45	-0.37
δl_i	0.56	-0.42	1.12	0.31	0.43	0.72	0.17	-0.68	1.08	0.00	0.26	0.58
$10^3 \delta \kappa_i$	1.03	0.14	0.51	0.59	0.50	0.81	15.89	12.00	0.53	3.90	6.91	21.19

(d) Pour le modèle de raideur

TABLE 5.6 – Distances entre les valeurs nominales et identifiées des paramètres des 4 modèles géométriques avec le modèle couplé de la déformation de la plate-forme mobile (en mm hormis pour $\delta \kappa_i$ qui est sans dimension)

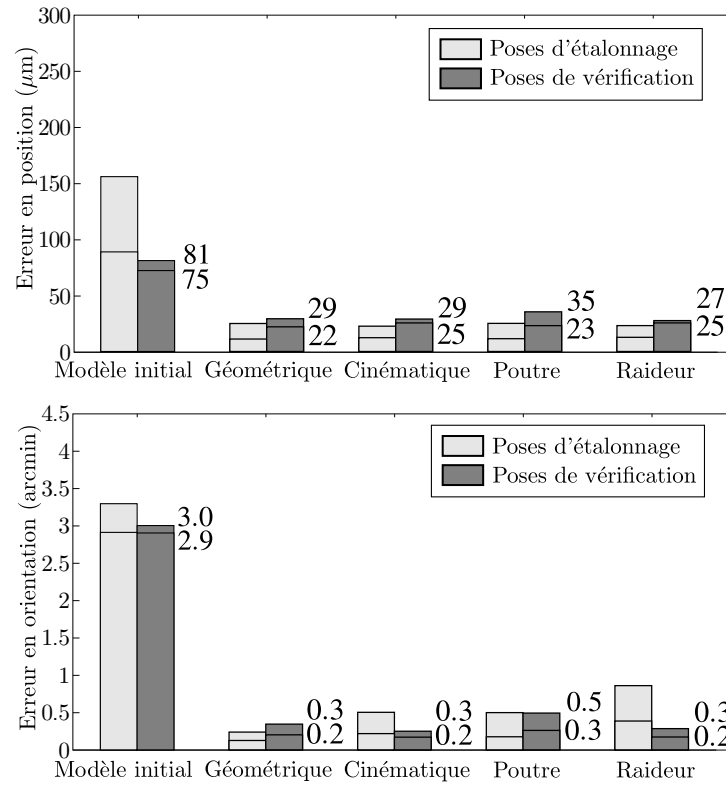


FIGURE 5.5 – Erreur en position et en orientation du positionnement de la plate-forme mobile après étalonnage sur les poses d'étalonnage et de vérification pour les 4 modèles géométriques avec le modèle couplé de la déformation de la plate-forme mobile. Les erreurs moyennes et maximales sont explicitement données pour les poses de vérification.

5.4.4 Analyse des résultats

Quelle que soit la modélisation choisie pour la déformation de la plate-forme mobile, tous les modèles donnent des résultats similaires en terme d'erreur de positionnement de la plate-forme mobile par rapport à la base. Ceci est dû au faible espace de travail dans lequel évolue le télescope. En effet, étant donné que l'orientation des articulations flexibles varie peu dans la zone de fonctionnement du télescope, leur comportement est équivalent à celui d'une rotule parfaite. De plus, les efforts qu'elles génèrent déforment l'anneau de la plate-forme mobile mais ne modifient pas ou peu le positionnement du télescope. Ainsi, le comportement géométrique du télescope peut être modélisé par celui d'un manipulateur 6-PUS.

En ce qui concerne la déformation de la plate-forme mobile, trois modèles ont été développés. Tous permettent l'obtention d'une bonne précision finale après étalonnage, c'est-à-dire qu'elle correspond aux spécifications du tableau 4.1. Cependant, la modélisation de la plate-forme mobile semble avoir un impact non négligeable sur la valeur des paramètres identifiés. Par exemple, ne pas prendre en compte la déformation de la plate-forme mobile conduit à des valeurs de u_i^x éloignées d'une quelconque réalité physique. Les déviations de l'orientation des actionneurs ont déjà pu être expliquées mais les déformations de la plate-forme mobile semblent aussi être prises en compte dans la valeur des autres paramètres du modèle, comme le montre la figure 5.6. Sur la figure 5.6 sont représentées les distances entre les valeurs nominales et identifiées des points d'attache A_i et B_i de la base et de la plate-forme mobile pour le modèle géométrique pour les trois modèles de déformation considérés. Dans un souci de lisibilité, ces distances sont amplifiées dans la figure 5.6.

La figure 5.6 montre que les déviations minimales par rapport aux paramètres nominaux sont obtenues avec le *modèle couplé* de déformation (triangles rouges). Ce résultat était attendu puisque le *modèle couplé* approche bien les déplacements des points B_i par rapport au bruit de mesure. Ainsi, le résidu ε_g de la fonction d'identification \mathbf{g} ne dépend pas - ou peu - de la déformation de la plate-forme mobile et cette source d'erreur n'est alors pas - ou peu - répercutée par l'algorithme d'identification sur la valeur des autres paramètres du modèle, comme expliqué théoriquement dans la section 3.6.

Pour les autres modèles, c'est-à-dire sans modéliser la déformation ou avec le *modèle découplé*, les valeurs identifiées de \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i sont proches. En effet, nous avons vu que dans les deux cas la déformation de la plate-forme mobile était en réalité prise en compte en un *modèle découplé* par l'intermédiaire d'un changement sur l'orientation des actionneurs. Par contre, les valeurs identifiées de \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i ne semblent pas correspondre à la conception initiale du télescope. Par exemple, la géométrie identifiée de la base considère un paramètre de conception α_0 plus petit que sa valeur nominale. Ceci est dû au fait qu'avec le *modèle découplé* des erreurs jusqu'à $60\mu\text{m}$ peuvent être observées sur la figure 4.12 sur la position des points B_i : le résidu ε_g de la fonction d'identification considère donc cette source d'erreur. Dans notre cas, cette source d'erreur est alors automatiquement prise en compte par l'algorithme d'identification par une modification des valeurs des paramètres du modèle.

Ainsi, les modèles *découplé* et *couplé* de la déformation de la plate-forme mobile permettent tous deux de satisfaire les spécifications requises du tableau 4.1 en terme de qualité de positionnement du miroir secondaire par rapport au miroir primaire en modélisant le télescope par un 6-PUS. Cependant, les valeurs identifiées des paramètres ne correspondent

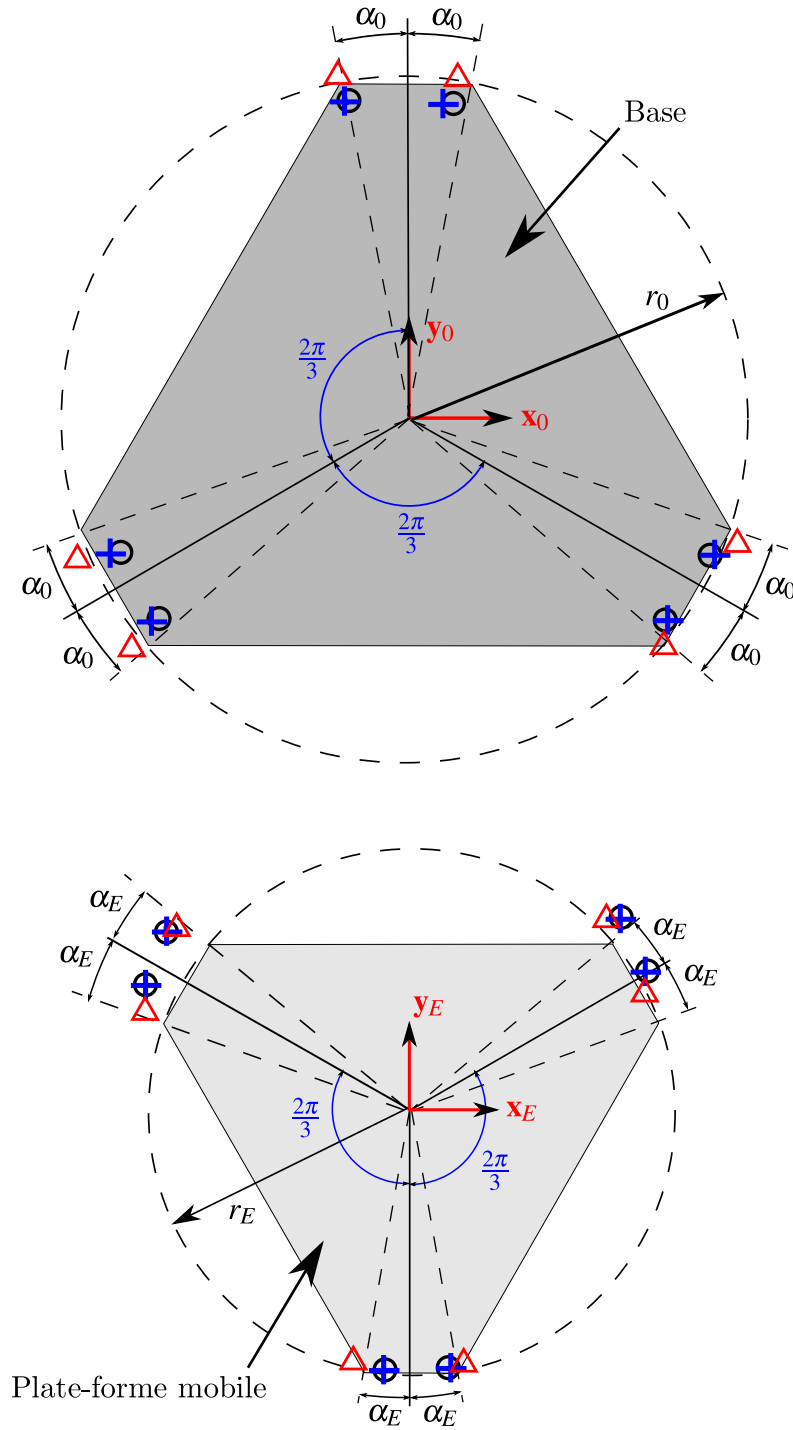


FIGURE 5.6 – Représentation des distances entre les valeurs nominales et identifiées des points d'attache A_i et B_i de la base et de la plate-forme mobile pour le modèle géométrique sans considérer la déformation de la plate-forme mobile (cercle bleu), et en la prenant en compte avec les modèles découplé (croix noire) et couplé (triangle rouge).

pas toujours aux positions réelles des points d'attache, l'algorithme d'étalonnage prenant automatiquement en compte les sources d'erreur non-modélisées lors de l'identification des paramètres des modèles. Les modèles identifiés permettent donc l'obtention de la précision statique nécessaire, mais aucune garantie ne peut être donnée sur l'utilisation des paramètres identifiés pour d'autres critères de performance : cinématique, dynamique, raideur, *etc.* En effet, la valeur des paramètres a été ajustée pour améliorer la précision statique uniquement. Dans le cas du télescope, cette limitation n'est pas gênante puisque le télescope travaille dans un faible espace de travail, à des vitesses faibles, et ne manipule aucune charge à part son propre poids. Cependant, nous pouvons nous demander si la prise en compte de mesures additionnelles pour l'étalonnage modifie ou non la valeur des paramètres identifiés. Pour cela, il est possible de prendre en compte les pastilles positionnées sur les jambes du télescope qui ont servi à valider le comportement rigide des jambes. De ces pastilles peut être extraite l'orientation des jambes qui peut aussi être considérée pour l'étalonnage, en addition des données de position et d'orientation de la plate-forme mobile.

5.5 Étalonnage en prenant en compte l'orientation des jambes

Pour la photogrammétrie, des pastilles ont été positionnées sur les jambes du télescope afin de pouvoir valider le comportement corps rigide de ces éléments. La mesure de l'orientation des jambes du télescope est donc disponible à partir des données photogrammétriques. Ce genre d'information ne sera pas disponible pour l'auto-étalonnage du télescope dans l'espace, où seules les informations sur la position et l'orientation de la plate-forme mobile seront accessibles, mais nous pouvons néanmoins nous intéresser, dans cette partie, à l'influence de la prise en compte de ces mesures additionnelles sur les résultats de l'étalonnage. Pour ce faire, il est nécessaire de redéfinir les fonctions d'identification. Le modèle géométrique ayant été validé précédemment, nous effectuerons seulement pour ce modèle la comparaison des résultats d'étalonnage en prenant en compte - ou non - les pastilles photogrammétriques des jambes. En ce qui concerne la déformation de la plate-forme mobile, celle-ci sera respectivement modélisée par les modèles *découplé* et *couplé*.

5.5.1 Modèle et fonction d'identification utilisés

Le modèle géométrique avec les modèles *découplé* et *couplé* de déformation de la plate-forme mobile est considéré. Pour chaque jambe et pour chaque configuration de mesure, l'orientation \mathbf{z}_i de la jambe i est mesurée. Ainsi, la fonction d'identification ${}^1\mathbf{g}_{i,p}$ devient un vecteur de dimension 3, définie à partir des équations de fermeture géométrique :

$${}^1\mathbf{g}_{i,p} = \mathbf{p}^p + \mathbf{R}^p \mathbf{b}_i^* - \mathbf{a}_i - \rho_i^p \mathbf{u}_i - l_i \mathbf{z}_i \quad (5.16)$$

La position des points B_i^* sera calculée à partir des modèles *découplé* et *couplé*, c'est-à-dire respectivement $\mathbf{b}_i^* = \mathbf{b}_i + \kappa_i(\rho_i - \rho_i^0)\mathbf{z}_o$ et $\mathbf{b}_i^* = \mathbf{b}_i + \mathbf{k}_i(\boldsymbol{\rho}^p - \boldsymbol{\rho}^0)\mathbf{z}_o$. En considérant la fonction objectif h_i de la jambe i à minimiser telle que $h_i = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_p} \mathbf{g}_{i,p}^T \mathbf{g}_{i,p}$, les simulations d'étalonnage avec un bruit de mesure de variance $3\mu\text{m}$ montrent que l'ajout de ces deux informations permet l'identification de l'orientation \mathbf{u}_i des actionneurs. Les résultats d'étalonnage et leur analyse sont donnés dans la section suivante.

5.5.2 Analyse des résultats

L'expérience confirme que l'orientation \mathbf{u}_i des actionneurs peut être identifiée. En ce qui concerne les paramètres a_i^z , b_i^z et l_i , ceux-ci restent liés dans les équations d'étalonnage et seulement l_i sera identifié, comme précédemment. Les résultats sont donnés en terme de distances entre les valeurs nominales et identifiées des paramètres dans le tableau 5.7 et en terme d'erreur de positionnement après étalonnage dans la figure 5.7.

L'analyse de la figure 5.7 montre des résultats similaires en considérant ou non l'orientation des jambes lors de l'étalonnage, à la différence près que pour le *modèle découplé*, l'étalonnage en prenant en compte l'orientation des jambes semble favoriser la précision en orientation par rapport à celle en position. Ce phénomène est peu souhaitable dans le cas du télescope puisque la précision en orientation est largement atteinte au regard des spécifications du tableau 4.1, contrairement à la précision en position.

En ce qui concerne les valeurs des paramètres identifiés, celles-ci sont semblables avec les modèles *découplé* et *couplé*, comme le montre les tableaux 5.7.a et 5.7.b. Cependant, les écarts entre les valeurs identifiées et les valeurs nominales sont encore plus importantes que lorsque les orientations des jambes ne sont pas utilisées pour réaliser l'étalonnage (voir tableau 5.7). Ceci pourrait être dû à la prise en compte de l'orientation des jambes dans la fonction d'identification. En effet, les points B_i^* et C_i sont alors contraints à appartenir à une droite d'orientation \mathbf{z}_i , l'orientation de la i^{eme} jambe, tandis que le point C_i n'était contraint qu'à appartenir à une sphère de centre B_i^* et de rayon l_i lorsque l'orientation des jambes n'était pas prise en compte. En supposant que des erreurs de modélisation existent, l'algorithme d'identification a alors moins de flexibilité sur la position des points B_i^* et C_i qu'en ne considérant pas l'orientation des jambes, et doit plus jouer sur leurs positions afin de minimiser la fonction d'identification $^1\mathbf{g}_{i,p}$. Le point C_i étant relié au point d'attache A_i par $\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i + \rho_i \mathbf{u}_i$, les valeurs de \mathbf{a}_i en sont alors affectées.

Ainsi, il n'est pas possible avec les modèles développés d'approcher les valeurs réelles des paramètres, leurs valeurs identifiées étant trop éloignées des valeurs nominales par rapport aux erreurs possibles de fabrication et d'assemblage pour pouvoir avoir une réelle signification physique. Les modèles étalonnés ne pourront donc pas être utilisés pour garantir d'autres critères de performance, par exemple pour un contrôle dynamique du télescope. Ces limitations se doivent d'être connues mais ne sont pas pénalisantes dans notre cas puisque le télescope fonctionne à de faibles vitesses. Pour le télescope considéré, seule une précision statique au moins équivalente à celle donnée dans les spécifications du tableau 4.1 est nécessaire afin de garantir la qualité des images désirée, et tous les modèles permettent l'obtention de cette précision après étalonnage.

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	0.28	-0.18	-1.15	-1.61	0.15	0.21	-0.28	0.06	-0.93	-1.80	0.36	-0.00
δa_i^y	2.17	2.31	0.49	0.20	0.16	-1.52	2.02	2.13	0.23	0.34	0.26	-1.62
δb_i^x	2.23	0.29	-1.21	-0.37	-0.28	0.49	1.67	0.53	-0.98	-0.56	-0.07	0.28
δb_i^y	3.66	3.88	3.56	1.31	0.64	0.68	3.49	3.68	3.31	1.45	0.74	0.58
$10^3 \delta u_i^x$	4.15	3.51	-8.86	9.53	-4.17	-2.41	4.35	2.68	-7.63	9.66	-4.32	-2.55
$10^3 \delta u_i^y$	0.75	-4.21	-0.28	-10.52	-8.65	9.13	-1.08	-5.06	0.76	-10.16	-8.20	9.66
δl_i	0.21	-0.32	0.71	0.07	0.06	0.52	0.20	-0.33	0.71	0.08	0.07	0.52
$10^3 \delta \kappa_i$	30.15	16.44	14.72	9.01	4.64	16.56	23.26	13.71	15.34	10.04	10.01	11.41

(a) Avec le modèle découplé et \mathbf{z}_i mesurée(b) Avec le modèle couplé et \mathbf{z}_i mesurée

i	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
δa_i^x	0.32	0.29	-1.74	-2.93	0.89	2.95	-1.71	0.41	0.30	-1.58	-0.18	-0.34
δa_i^y	2.66	2.60	-2.54	-1.99	-1.71	-2.40	-0.33	-0.21	-2.12	0.37	0.98	-2.62
δb_i^x	3.59	0.72	-0.09	2.43	-3.72	-0.44	0.56	1.91	0.04	0.41	-1.82	-0.32
δb_i^y	-1.34	-0.87	4.24	1.40	0.01	3.02	-0.19	-0.21	2.25	1.46	0.61	-0.22
δl_i	0.91	0.05	1.48	0.48	0.62	1.11	0.37	-0.45	1.02	0.25	0.43	0.58
$10^3 \delta \kappa_i$	7.10	1.60	-0.61	1.62	-0.72	6.48	9.58	1.98	4.43	3.33	0.67	6.99

(c) Avec le modèle découplé sans \mathbf{z}_i mesurée(d) Avec le modèle couplé sans \mathbf{z}_i mesurée

TABLE 5.7 – Distances entre les valeurs nominales et identifiées des paramètres du modèle géométrique avec les modèles découplé et couplé de déformation de la plate-forme mobile, avec et sans la mesure de l'orientation des jambes (en mm hormis pour $\delta \kappa_i$ qui est sans dimension)

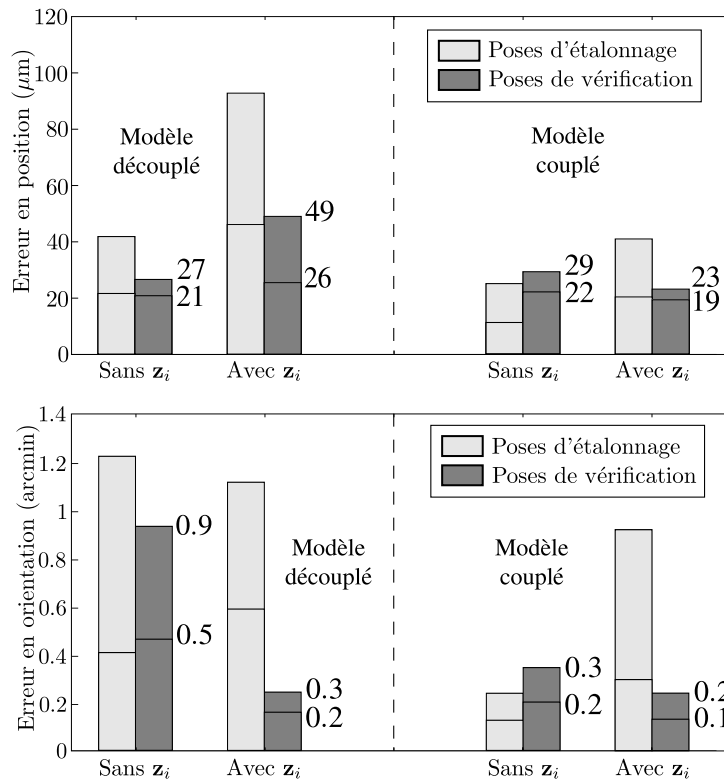


FIGURE 5.7 – Erreur en position et en orientation du positionnement de la plate-forme mobile après étalonnage sur les poses d'étalonnage et de vérification avec le modèle géométrique et les modèles découplé et couplé de déformation de la plate-forme mobile. Les erreurs moyennes et maximales sont explicitement données pour les poses de vérification.

5.6 Conclusions

L'étalonnage avec les données de photogrammétrie et en utilisant la méthodologie de la section 5.2 permet une comparaison efficace et rapide des différents modèles développés dans le chapitre précédent. Le comportement géométrique des articulations flexibles a ainsi pu être validé par un modèle rotule, le déplacement de l'extrémité des articulations flexibles par rapport à un modèle rotule restant faible par rapport au bruit de mesure de photogrammétrie sur la zone de fonctionnement du télescope. De plus, la prise en compte des efforts qu'elles génèrent sur l'équilibre statique de la plate-forme mobile n'améliore pas la qualité de positionnement du télescope. Les efforts générés semblent néanmoins importants puisqu'une déformation de la plate-forme mobile a été observée. Le fait que leur prise en compte n'améliore pas le positionnement de la plate-forme mobile peut être imputable à l'importante raideur des articulations flexibles dans la direction des jambes. En effet, une erreur de $3\mu\text{m}$ est suffisante pour générer des efforts de plus de 30N, ce qui rend le modèle de raideur très sensible au bruit de mesure puisque ces efforts sont du même ordre de grandeur que ceux calculés dans le plan perpendiculaire à la direction des jambes. De plus, les paramètres de raideur sont mal connus puisque leur identification n'est pas possible avec les données de photogrammétrie. Notons qu'il aurait pu être intéressant de mesurer directement la raideur d'une articulation en l'isolant sur un banc d'essai. Malheureusement, cette manipulation n'est pas possible dans notre cas puisque les articulations flexibles ont été réalisées sur mesure et que le télescope n'est pas démontable. Ainsi, le modèle de raideur ne permet pas d'améliorer la précision après étalonnage par rapport aux modèles géométrique ou cinématique. Le télescope peut donc être modélisé par un 6-PUS puisque la précision obtenue après étalonnage répond aux spécifications du tableau 4.1 et qu'augmenter la complexité du modèle ne permet pas d'améliorer la précision du télescope. Notons cependant que son comportement peut être correctement approché par une matrice jacobienne constante sur le faible espace de travail du télescope.

En ce qui concerne la déformation de la plate-forme mobile, ne pas la prendre en compte ou la modéliser par l'intermédiaire du *modèle découplé* permet l'obtention de la même précision finale après étalonnage. Ce phénomène est dû au fait que l'algorithme d'identification prend automatiquement en compte la déformation de la plate-forme mobile en un *modèle découplé* en modifiant l'orientation des actionneurs. Le *modèle couplé* de déformation améliore quant à lui principalement la précision en orientation, qui est de toute façon déjà inférieure aux spécifications du tableau 4.1. De plus, l'identification de la matrice \mathbf{K} du *modèle couplé* nécessite la mesure du déplacement des pastilles de photogrammétrie de la plate-forme mobile tandis que les coefficients κ_i du *modèle découplé* peuvent être directement identifiés à partir des mesures de position et d'orientation de la plate-forme mobile. Un autre avantage du *modèle découplé* est que la déformation de la plate-forme peut être directement prise en compte dans le déplacement des actionneurs. En effet, les orientations \mathbf{u}_i des actionneurs n'étant pas identifiables avec les mesures de la pose de la plate-forme mobile, elles peuvent être fixées à leurs valeurs nominales \mathbf{z}_o . Il est alors possible en considérant (5.16) de prendre en compte la déformation de la plate-forme mobile directement dans les déplacements des actionneurs en définissant $\rho_i^* = (1 - \kappa_i)\rho_i + \kappa_i\rho_i^0$. Le modèle géométrique du télescope devient

alors pour la i^{eme} jambe :

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i - \rho_i^* \mathbf{u}_i - l_i \mathbf{z}_i \quad (5.17)$$

ce qui permet le calcul de ρ_i^* avec la même procédure que celle décrite dans la section 4.5.1.

Le modèle alors défini peut être vu comme un modèle hybride puisque le modèle de (5.17) considère une modélisation 6-PUS du télescope, et approche les déformations de la plate-forme mobile par un *modèle découplé*. Le modèle développé est donc le couplage d'un modèle paramétrique, reposant sur la géométrie réelle du télescope, et d'un modèle non-paramétrique, reposant sur les informations des capteurs mais dont les coefficients n'ont pas de réalité physique. Ce modèle hybride présente l'avantage de pouvoir contrôler la valeur des paramètres identifiés par étalonnage, et surtout de pouvoir les expliquer. En effet, sans l'élaboration des modèles de déformation de la plate-forme mobile, il n'aurait pas été possible d'expliquer l'importante orientation identifiée des actionneurs. Le modèle hybride ainsi développé permet donc de contrôler l'influence des sources d'erreur non-modélisées physiquement sur la valeur des paramètres identifiés. Nous avons cependant pu observer que les valeurs des paramètres identifiés ne reflétaient pas une réalité physique et que le modèle étalonné ne devait pas être utilisé pour garantir d'autres critères de performance que la précision statique du télescope.

Étant donné que nous venons de valider le fait que l'étalonnage du modèle géométrique de (5.17) est possible à partir des données de position et d'orientation de la plate-forme mobile, ce modèle sera donc considéré dans la suite du document. L'objectif est maintenant d'auto-étalonner le télescope à partir des mesures disponibles dans l'espace, c'est-à-dire en considérant les données des images obtenues. L'analyse des données issues des images permet de remonter aux défauts de positionnement du miroir secondaire par rapport au miroir primaire, et donc au défaut de positionnement de la plate-forme mobile par rapport à la base du télescope. Pour cela, un modèle opto-mécanique du télescope est requis. Dans le chapitre suivant, le modèle opto-mécanique du télescope sera donc développé puis étalonné à partir des données obtenues par imagerie.

Modélisation opto-mécanique et Auto-étalonnage par imagerie

Résumé : Le projet dans lequel s'inscrit le développement du télescope d'observation spatial actif prévoit son déploiement dans l'espace. Afin d'obtenir une image de qualité, il est nécessaire de pouvoir étalonner le télescope après son déploiement, donc dans l'espace. L'analyse des défauts des images générées par le télescope permet d'obtenir des informations sur les corrections à apporter sur le positionnement relatif des deux miroirs. Il est alors possible d'obtenir depuis l'espace des informations sur la position et l'orientation de la plate-forme mobile. Ces informations peuvent être analysées à l'aide d'un modèle optique du télescope, permettant de relier les défauts optiques observés aux corrections de positionnement du miroir secondaire à effectuer. Les corrections de positionnement du miroir secondaire étant connues, le modèle géométrique permet alors de calculer les corrections à apporter sur la position des actionneurs. A partir de mesures par imagerie, plusieurs modèles opto-mécaniques sont proposés, reliant les positions des actionneurs directement aux défauts des images. Le choix entre ces différents modèles s'effectue par étalonnage par imagerie. Comme précédemment, le choix des configurations de mesure sera optimisé afin d'avoir la meilleure identifiabilité possible des paramètres. Cette étude permet de valider la possibilité d'auto-étalonner le télescope dans l'espace directement à partir des mesures des positions des actionneurs et d'une analyse des défauts des images.

Sommaire

6.1	Introduction	102
6.2	Protocole expérimental par imagerie	103
6.2.1	Dispositif expérimental	104
6.2.2	Choix des configurations de mesure	104
6.3	Analyse des résultats par imagerie	110
6.3.1	Analyse du bruit de mesure	111
6.3.2	Effet du bruit de mesure sur les configurations mesurées	116
6.4	Modèles opto-mécaniques développés	117
6.4.1	Modèles linéaires	117
6.4.2	Modèles quadratiques	118
6.5	Résultats expérimentaux	119
6.5.1	Pour les modèles linéaires	120
6.5.2	Pour les modèles quadratiques	122
6.5.3	Effet de l'endroit du champ sur les coefficients des polynômes de Zernike	124
6.6	Choix des poses de qualité optique optimale	128
6.7	Conclusions	131

6.1 Introduction

Le modèle géométrique de (5.17) du télescope a pu être étalonné et validé grâce aux données de photogrammétrie. Ce modèle relie les positions des actionneurs au positionnement de la plate-forme mobile du télescope, et donc de son miroir secondaire. L'objectif est cependant de pouvoir garantir la qualité optique du télescope dans l'espace. Il est donc nécessaire de pouvoir relier les défauts optiques mesurés aux corrections à apporter sur le positionnement du miroir secondaire : c'est le rôle du modèle optique. D'autre part, les efforts générés sur la structure du télescope lors de sa mise sur orbite peuvent déformer, même légèrement, certaines pièces de la structure. Afin de prendre en compte ces déformations, il est nécessaire de pouvoir étalonner le télescope directement dans l'espace. De plus, le développement du télescope d'observation spatial actif s'inscrit dans un projet plus large qui inclut son déploiement dans l'espace, comme le montre la figure 6.1. Les jambes sont alors des rubans flexibles qui permettent au télescope de prendre une forme compacte pour la mise sur orbite, puis de se déployer une fois dans l'espace. Les jambes une fois déployées peuvent être considérées rigides, mais leur longueur dépend de la qualité du déploiement, fonction d'une multitude de paramètres tels que la température, l'humidité, les chocs dus à la mise sur orbite, *etc.* L'étalonnage du modèle opto-mécanique du télescope, c'est-à-dire le modèle géométrique couplé à un modèle optique, doit donc pouvoir être réalisé dans l'espace, à partir des mesures disponibles.

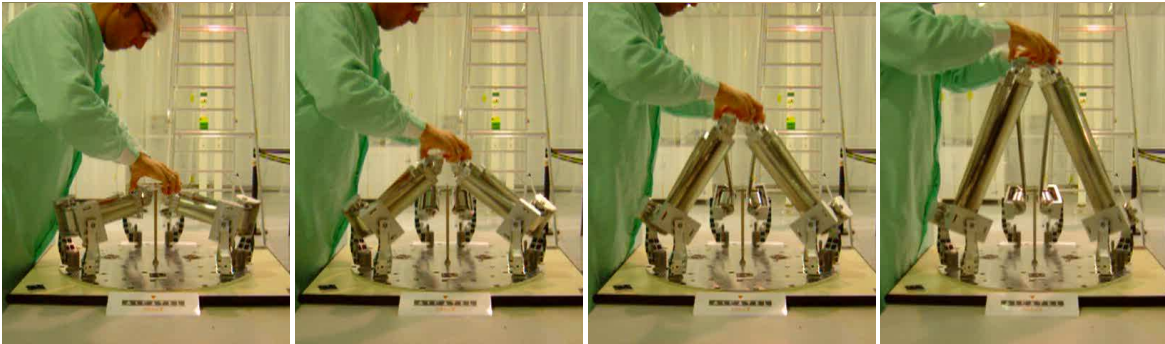


FIGURE 6.1 – *Essai de déploiement d'un des prototypes du télescope, © Thales*

Les seules informations disponibles dans l'espace sont les images générées par le télescope, et bien sûr la position des actionneurs. L'analyse des défauts des images peut permettre de reconstituer le front d'onde. Ainsi, à partir d'un objet lumineux situé à l'infini, les défauts de l'image obtenue peuvent être projetés sur une carte d'erreur du front d'onde : l'image totale est vue comme une somme de défauts typiques. Il existe une infinité de défauts typiques qui sont généralement classés selon leur degré d'importance sur la qualité de l'image. Pour l'étude par imagerie, nous nous focaliserons sur les 10 premiers défauts, représentés en figure 6.2. Le nom des défauts provient souvent de la forme de la tâche image observée : par exemple, un défaut de coma correspond à une tâche image représentant la queue d'une comète, et un défaut de trèfle à une forme triangulaire. Les indications 0, 30, 45, X ou Y renseignent quant à eux sur la direction principale du défaut.

Afin de pouvoir minimiser ces défauts par un processus d'étalonnage, il faut pouvoir

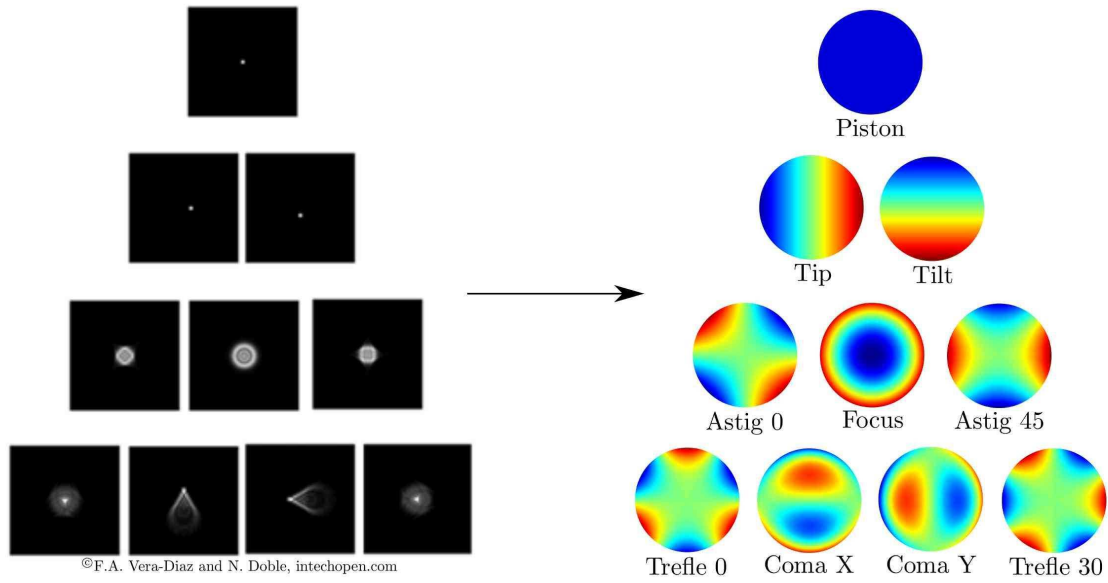


FIGURE 6.2 – Défauts considérés et carte d'erreur du front d'onde correspondante

en rendre compte par une ou plusieurs valeurs chiffrées. Une façon d'obtenir ces mesures est de projeter les défauts sur une base de polynômes orthogonaux, appelés polynômes de Zernike. Chaque polynôme, fonction de la position sur le disque unité, modélise un défaut typique de l'image. La combinaison linéaire des polynômes de Zernike permet de modéliser l'erreur totale du front d'onde. Ainsi, minimiser les coefficients des polynômes de Zernike permet d'améliorer la qualité de l'image. L'objectif du modèle optique est donc de relier les coefficients des polynômes de Zernike aux corrections à apporter sur le positionnement du miroir secondaire. Les corrections à apporter peuvent ensuite être prises en compte par une modification des positions des actionneurs grâce au modèle géométrique.

Pour pouvoir valider la qualité du processus d'étalonnage par imagerie qui sera réalisé dans l'espace, il est nécessaire de mettre en place un dispositif expérimental sur Terre. Ce dispositif est décrit dans la section suivante, ainsi que le choix des configurations de mesure. Ensuite, plusieurs modèles opto-mécaniques du télescope pourront être développés. Nous discuterons finalement du choix du modèle opto-mécanique par une analyse des résultats d'étalonnage par imagerie.

6.2 Protocole expérimental par imagerie

Dans l'espace, le télescope pourra observer des objets lumineux situés à l'infini (typiquement des étoiles) afin d'obtenir des informations sur son état par l'intermédiaire d'une analyse des images. Pour pouvoir simuler sur Terre les mesures par imagerie qui pourront être réalisées dans l'espace, un dispositif expérimental doit être mis en place. Les configurations de mesure qui seront utilisées pour l'étalonnage doivent ensuite être optimisées afin d'améliorer l'identifiabilité des paramètres.

6.2.1 Dispositif expérimental

L'objectif est de pouvoir simuler un objet lumineux qui sera observé à l'infini par le télescope. Ceci peut être réalisé en plaçant un objet ponctuel lumineux dans le plan focal d'une lentille optique convergente, comme le montre la figure 6.3. La lentille convergente du schéma est en réalité un collimateur, c'est-à-dire un télescope précédemment étalonné qui possède les mêmes propriétés optiques que le télescope à étalonner. L'objet ponctuel unique est aussi remplacé par une plaque multi-trous permettant au télescope d'observer plusieurs objets lumineux vus à l'infini. Le télescope voit donc une matrice d'objets situés à l'infini, et sa caméra devrait renvoyer une matrice constituée de pixels uniques dans l'idéal.

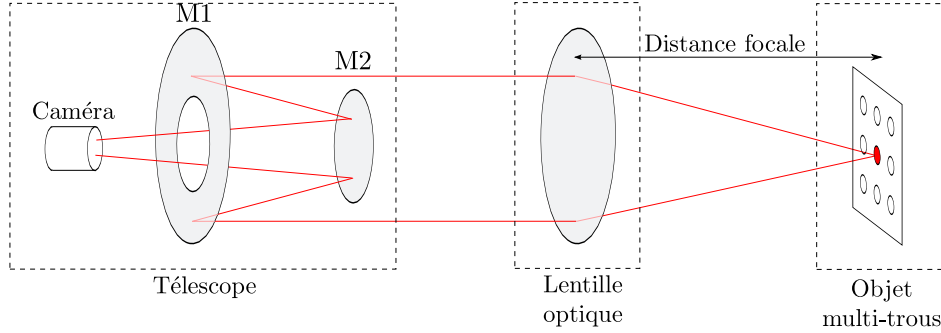


FIGURE 6.3 – Dispositif expérimental de mesure par imagerie

Cependant, la méconnaissance du modèle opto-mécanique du télescope, les défauts optiques du collimateur et de la plaque multi-trous, ainsi que les conditions extérieures, génèrent des défauts dans chaque image vue par la caméra. Ces défauts sont dans notre cas mesurés par l'intermédiaire de valeurs chiffrées : les coefficients des polynômes de Zernike comme expliqué précédemment.

6.2.2 Choix des configurations de mesure

Une fois le dispositif expérimental mis en place, les configurations de mesure qui seront utilisées pour l'étalonnage doivent être optimisées. Les algorithmes de choix des configurations de mesure nécessitent une estimation de la matrice d'identification, dépendante du modèle considéré. Dans le cas du télescope, un modèle opto-mécanique initial a été obtenu par différence finie autour d'une position de référence $\boldsymbol{\rho}^0$ des actionneurs pour laquelle la qualité d'image était jugée satisfaisante, avec :

$$\boldsymbol{\rho}^0 = [10.46, 10.12, 10.15, 10.40, 10.31, 10.39]^T \text{ (en mm)} \quad (6.1)$$

Le modèle initial se présente sous la forme d'une matrice constante \mathbf{M} appelée matrice opto-mécanique qui relie les coefficients des 10 premiers polynômes de Zernike \mathbf{z}^p de la pose p à la position $\boldsymbol{\rho}^p$ des actionneurs telle que :

$$\mathbf{z}^p = \mathbf{M}_{10 \times 6}(\boldsymbol{\rho}^p - \boldsymbol{\rho}^0) \quad (6.2)$$

Typiquement, les coefficients des 3 premiers polynômes de Zernike ne sont pas corrigés puisqu'ils correspondent simplement à un recadrage de l'image : ces coefficients sont non-nuls lorsque l'image n'est pas centrée. Dans notre cas, ils ne seront pas considérés puisque nous utilisons une plaque multi-trous au lieu d'un objet unique, l'image de chaque trou ne pouvant être centrée. Les 7 coefficients des polynômes de Zernike restants seront notés z_j , avec $j = 4..10$ et correspondront respectivement aux défauts de focus, astigmatisme à 0° , astigmatisme à 45° , coma selon x , coma selon y , trèfle à 0° et trèfle à 30° [Nol76].

En considérant le modèle initial, les coefficients des lignes 4 à 10 de la matrice opto-mécanique \mathbf{M} doivent donc être identifiés à partir des mesures des coefficients des polynômes de Zernike \mathbf{z}^p et de la position $\boldsymbol{\rho}^p$ des actionneurs de la pose p . Différencier (6.2) par rapport aux coefficients de la matrice opto-mécanique \mathbf{M} permet l'obtention de la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ^p pour la p^{eme} configuration de mesure, avec \mathbf{m}_j la j^{eme} ligne de \mathbf{M} , telle que :

$$\begin{bmatrix} \delta z_4^p \\ \vdots \\ \delta z_{10}^p \end{bmatrix} = \mathbf{G}_\xi^p \begin{bmatrix} \delta \mathbf{m}_4^T \\ \vdots \\ \delta \mathbf{m}_{10}^T \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{G}_\xi^p = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\rho}^p - \boldsymbol{\rho}^0)^T & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & (\boldsymbol{\rho}^p - \boldsymbol{\rho}^0)^T \end{bmatrix}_{7 \times 42} \quad (6.4)$$

L'assemblage des matrices \mathbf{G}_ξ^p pour l'ensemble des configurations de mesure permet l'obtention de la matrice d'identification totale $\mathbf{G}_\xi^{\text{tot}}$. Une permutation des lignes de $\mathbf{G}_\xi^{\text{tot}}$ en permet son écriture sous forme diagonale par blocs :

$$\mathbf{G}_\xi^{\text{tot}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\xi & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{G}_\xi \end{bmatrix}_{7N_p \times 42} \quad \text{avec} \quad \mathbf{G}_\xi = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\rho}^1 - \boldsymbol{\rho}^0)^T \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\rho}^{N_p} - \boldsymbol{\rho}^0)^T \end{bmatrix}_{N_p \times 6} \quad (6.5)$$

La matrice d'identification totale $\mathbf{G}_\xi^{\text{tot}}$ étant diagonale par blocs, l'étude de la détermination des poses optimales peut se restreindre à l'étude de la matrice \mathbf{G}_ξ puisque les valeurs singulières de $\mathbf{G}_\xi^{\text{tot}}$ intervenant dans le calcul des indices d'observabilité présentés dans le chapitre 2 peuvent s'écrire en fonction des valeurs singulières de \mathbf{G}_ξ . Devant la forme relativement simple de cette matrice, nous proposons d'étudier l'effet de différents indices d'observabilité sur le choix des poses optimales, et sur les résultats d'étalonnage. Le choix des configurations de mesure sera donc effectué en considérant respectivement le conditionnement de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$ (relatif à O2) et le produit de ses valeurs singulières (relatif à O1). Nous verrons aussi qu'une décomposition en valeurs singulières de la matrice opto-mécanique \mathbf{M} permet d'orienter le choix des poses de vérification.

6.2.2.1 Détermination des configurations de mesure avec O2

Tout d'abord nous proposons d'effectuer le choix des configurations de mesure en considérant le conditionnement de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$, relatif à l'indice d'observabilité O2. Afin que chaque coefficient de la matrice ait la même influence sur son conditionnement, les déplacements $\rho_i - \rho_i^0$

du i^{eme} actionneur par rapport à sa position de référence ρ_i^0 sont normalisés par rapport au déplacement maximal $\rho_i^{\max} - \rho_i^0$. Nous retombons ici sur la définition de la course maximale normalisée c_{ρ_i} du i^{eme} actionneur telle que $\rho_i = \rho_i^0 + c_{\rho_i}|\rho_i^{\max} - \rho_i^0|$, avec $c_{\rho_i} \in [-1; 1]$. En considérant le nombre minimal de poses, soit 6, \mathbf{G}_ξ devient une matrice carrée et une solution triviale pour minimiser le conditionnement de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$ est alors de considérer $\mathbf{G}_\xi = \mathbf{Id}$, ce qui revient à exciter chaque actionneur indépendamment suivant sa course maximale. Afin de vérifier la linéarité du modèle, l'excitation de chaque actionneur peut aussi être réalisée telle que $c_{\rho_i} = -1$ qui correspond aussi à un conditionnement optimal. De cette étude ressortent donc 12 configurations de mesure récapitulées dans le tableau 6.1.

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
c_{ρ_1}	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
c_{ρ_2}	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
c_{ρ_3}	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
c_{ρ_4}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0
c_{ρ_5}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0
c_{ρ_6}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1

TABLE 6.1 – Poses optimisées en considérant le conditionnement de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$, en fonction des déplacements des actionneurs avec $\rho_i = \rho_i^0 + c_{\rho_i}|\rho_i^{\max} - \rho_i^0|$.

Le modèle opto-mécanique (6.2) relie les coefficients des polynômes de Zernike directement à la position des actionneurs. Précédemment, nous avons pu voir que le modèle cinématique considérant une matrice jacobienne constante sur l'espace de travail donnait de bons résultats en terme de précision de positionnement du miroir secondaire. Il est donc possible de relier linéairement les positions des actionneurs au positionnement du miroir secondaire. Ainsi, nous pouvons faire l'hypothèse que le modèle optique du télescope, qui relie les coefficients des polynômes de Zernike au positionnement du miroir secondaire, est aussi linéaire et peut s'écrire tel que :

$$\mathbf{z} = \mathbf{N}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0) \quad (6.6)$$

En considérant le modèle de (6.6), le même raisonnement que précédemment peut être effectué pour optimiser le conditionnement de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$ et donner cette fois-ci des configurations de mesure optimisées en fonction des déplacements du miroir secondaire. Ces configurations sont données dans le tableau 6.2 en terme de déplacement maximal normalisé de la plateforme mobile par rapport à la base : par exemple $c_x = 1$ lorsque le déplacement suivant l'axe \mathbf{x}_o de la plate-forme mobile est maximal sur l'espace de travail. Étant donné que la structure du télescope est symétrique et que la position de référence \mathbf{X}^0 est située vers le centre de l'espace de travail, alors $c_x \in [-1; 1]$.

p	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
c_x	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
c_y	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
c_z	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
c_{θ_x}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0
c_{θ_y}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0
c_{θ_z}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1

TABLE 6.2 – Poses optimisées en considérant le conditionnement de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$, en fonction des déplacements du miroir secondaire

6.2.2.2 Détermination des configurations de mesure avec $O1$

Nous proposons maintenant d'effectuer le choix des configurations de mesure en considérant le déterminant de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$, relatif à l'indice d'observabilité $O1$. Le problème d'optimisation est donc identique à celui décrit en page 41. Comme précédemment, nous utilisons l'algorithme *sqp* [Bog95] implanté dans la fonction *fmincon* de MATLAB pour résoudre ce problème d'optimisation sous contrainte (voir section 2.4.2.3), et les déplacements des actionneurs sont normalisés par rapport à leur déplacement maximal.

Considérer le modèle cinématique permet d'écrire $\mathbf{z} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) = \mathbf{M}\mathbf{J}_0^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)$, avec \mathbf{J}_0 la jacobienne cinématique supposée constante sur l'espace de travail. Ainsi, maximiser le déterminant de $\mathbf{M}\mathbf{J}_0^{-1}$ revient à maximiser le déterminant de \mathbf{M} puisque \mathbf{J}_0^{-1} est de déterminant constant. Le problème est donc identique en fonction de la position des actionneurs et du positionnement de la plate-forme mobile. Cette propriété a été validée par simulation et les poses optimisées en considérant le déterminant de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$ sont données dans le tableau 6.3. Dans un souci de comparaison avec le conditionnement, le même nombre de configuration $N_p = 12$ est utilisé.

p	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
c_{ρ_1}	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
c_{ρ_2}	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1
c_{ρ_3}	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1
c_{ρ_4}	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
c_{ρ_5}	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1
c_{ρ_6}	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1

TABLE 6.3 – Poses optimisées en considérant le déterminant de $\mathbf{G}_\xi^T \mathbf{G}_\xi$, en fonction des déplacements des actionneurs

6.2.2.3 Choix des poses de vérification

Nous proposons dans cette section de réfléchir au choix des poses de vérification, l'objectif étant de déterminer les configurations pour lesquelles les coefficients des polynômes de Zernike sont les plus sollicités. Ainsi, il serait possible d'obtenir une certification des valeurs maximales des coefficients des polynômes de Zernike sur l'intégralité de l'espace de travail avec les modèles opto-mécaniques, et donc de pouvoir garantir l'obtention d'une certaine qualité d'image sur l'ensemble de la zone de fonctionnement du télescope. Pour ce faire, considérons la matrice opto-mécanique \mathbf{M} initiale reliant les 7 coefficients des polynômes de Zernike considérés (en nm) aux positions des actionneurs (en mm) :

$$\mathbf{M} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 546.06 & 562.80 & 552.27 & 547.82 & 546.51 & 562.98 \\ 29.71 & 8.26 & -17.70 & 7.90 & 22.11 & 17.04 \\ 4.41 & -18.00 & -21.61 & -0.79 & 6.76 & 10.81 \\ 50.03 & 39.89 & 142.34 & -182.49 & -187.14 & 151.72 \\ 173.92 & -198.43 & -139.26 & 48.72 & -59.63 & 125.88 \\ -7.71 & -8.27 & -8.40 & -8.26 & -9.36 & -12.76 \\ -4.20 & -6.88 & -7.93 & -27.89 & -18.67 & -22.46 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

L'analyse des configurations de mesure ayant le plus d'influence sur les valeurs des coefficients des polynômes de Zernike peut être effectuée à partir d'une décomposition en valeurs singulières de la matrice opto-mécanique qui permet l'obtention de trois matrices \mathbf{U} , $\mathbf{\Sigma}$ et \mathbf{V} telles que $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$, avec $\mathbf{\Sigma}$ une matrice diagonale comportant les valeurs singulières de \mathbf{M} , et \mathbf{U} et \mathbf{V} des matrices orthogonales unitaires comportant les vecteurs dits d'entrées et de sorties. Une explication graphique est donnée en figure 6.4 où l'image d'un cercle unitaire \mathbf{S} par la matrice \mathbf{M} est représentée par une ellipse.

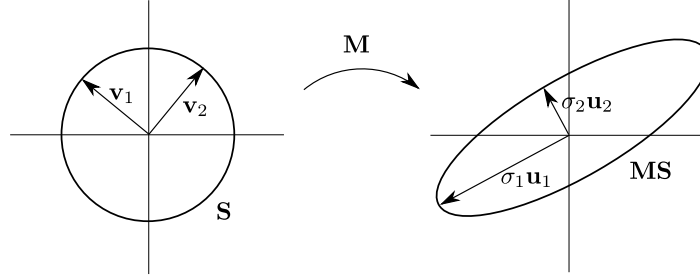


FIGURE 6.4 – Explication graphique d'une décomposition en valeurs singulières

Les matrices \mathbf{U} , $\mathbf{\Sigma}$ et \mathbf{V} obtenues sont :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1.00 & 0.00 & -0.02 & 0.01 & -0.02 & -0.03 & -0.01 \\ -0.02 & -0.01 & -0.08 & -0.90 & 0.07 & 0.43 & 0.01 \\ 0.01 & 0.00 & -0.08 & -0.28 & 0.64 & -0.69 & -0.16 \\ -0.01 & 0.94 & 0.35 & -0.03 & 0.04 & 0.02 & -0.01 \\ 0.02 & 0.35 & -0.93 & 0.08 & -0.07 & 0.01 & 0.01 \\ 0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.19 & 0.05 & -0.98 \\ 0.03 & 0.02 & 0.03 & -0.34 & -0.74 & -0.58 & 0.11 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$\mathbf{\Sigma} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1356 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 342 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.40 & 0.32 & -0.47 & -0.33 & -0.64 & -0.09 \\ -0.42 & -0.10 & 0.57 & -0.41 & -0.07 & 0.56 \\ -0.41 & 0.25 & 0.52 & 0.51 & -0.20 & -0.44 \\ -0.40 & -0.45 & -0.36 & 0.58 & -0.06 & 0.41 \\ -0.40 & -0.58 & -0.06 & -0.35 & 0.27 & -0.55 \\ -0.41 & 0.54 & -0.23 & -0.00 & 0.69 & 0.10 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Nous pouvons alors remarquer que pour chaque colonne de la matrice \mathbf{U} , un de ses coefficients est toujours voisin de 1, tandis que les autres peuvent être fixés à 0 en première

approximation, sauf pour les colonnes 5 et 6. La matrice $\tilde{\mathbf{U}}$ qui approche \mathbf{U} ressemble alors à une matrice de permutation, sauf pour les colonnes 5 et 6 qui restent liées :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 & -0.6 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

En considérant que la matrice $\tilde{\mathbf{U}}$ est une bonne approximation de \mathbf{U} , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^p &= \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}^p - \boldsymbol{\rho}^0) \\ &= \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T(\boldsymbol{\rho}^p - \boldsymbol{\rho}^0) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{w} \approx \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T(\boldsymbol{\rho}^p - \boldsymbol{\rho}^0) \\ &\approx \tilde{\mathbf{U}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T(\boldsymbol{\rho}^p - \boldsymbol{\rho}^0) \quad \text{avec } \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{z} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Ainsi, si $(\boldsymbol{\rho}^p - \boldsymbol{\rho}^0)$ est égal à la i^{eme} colonne \mathbf{v}_i de \mathbf{V} , seulement la i^{eme} composante du vecteur \mathbf{w} est non-nulle puisque la matrice \mathbf{V} est une matrice orthogonale unitaire. Étant donné que la matrice $\tilde{\mathbf{U}}$ est une matrice de permutation (hormis pour les colonnes 5 et 6), le vecteur \mathbf{w} nouvellement défini est simplement une permutation des lignes du vecteur \mathbf{z} répertoriant les coefficients des polynômes de Zernike. Chaque colonne de \mathbf{V} donne donc la direction du vecteur dans la base des positions des actionneurs qui excite le plus les colonnes de $\tilde{\mathbf{U}}$, et donc qui excitent indépendamment ou presque chaque coefficient des polynômes de Zernike. Par exemple, la première colonne \mathbf{v}_1 de \mathbf{V} excite principalement z_4 , le focus, les deuxième et troisième colonnes agissent sur z_7 et z_8 , les comas, *etc...* Les colonnes de \mathbf{V} définissent ainsi une base orthonormée, donc robuste aux erreurs sur les positions des actionneurs, qui excitent indépendamment les coefficients des polynômes de Zernike d'après la matrice opto-mécanique initiale, hormis pour les colonnes 5 et 6 agissant respectivement sur les défauts d'astigmatisme à 45° et de trèfle à 30° . L'effet de \mathbf{V} sur les coefficients des polynômes de Zernike s'obtient par une analyse de \mathbf{MV} , le terme prépondérant de la i^{eme} colonne de \mathbf{MV} étant le coefficient des polynômes de Zernike le plus sollicité par la i^{eme} colonne de \mathbf{V} :

$$\mathbf{MV} = \begin{bmatrix} -1355 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -27 & -3 & -27 & -25 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & -26 & -8 & 12 & -4 \\ -9 & 320 & 116 & -1 & 1 & 0 \\ 22 & 120 & -310 & 2 & -1 & 0 \\ 22 & -2 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 36 & 8 & 10 & -10 & -14 & -3 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Chaque colonne de la matrice \mathbf{V} donne donc les déplacements des actionneurs par rapport à leur position de référence qui excitent le plus chacun des coefficients des polynômes de Zernike. L'effet de ces déplacements peut être optimisé en divisant chaque élément de la i^{eme} colonne de \mathbf{V} par le plus grand élément de cette colonne. Ainsi, 6 poses de vérification sont

obtenues en fonction des courses maximales normalisées c_{ρ_i} des actionneurs. Ces poses sont consignées dans le tableau 6.4.

p	37	38	39	40	41	42
c_{ρ_1}	0.96	-0.55	0.82	0.56	0.93	-0.16
c_{ρ_2}	1.00	0.17	-1.00	0.71	0.11	1.00
c_{ρ_3}	0.98	-0.43	-0.91	-0.89	0.29	-0.79
c_{ρ_4}	0.96	0.78	0.63	-1.00	0.09	0.72
c_{ρ_5}	0.97	1.00	0.11	0.60	-0.40	-0.99
c_{ρ_6}	0.99	-0.95	0.40	0.01	-1.00	0.18

TABLE 6.4 – Poses de vérification obtenues par analyse de la décomposition en valeurs singulières

Finalement, 7 poses de vérification sont prises aléatoirement dans l'espace de travail. Le nombre total de configurations de mesure s'élève donc à 50 en considérant la pose $n^{\circ}0$ correspondant à la position de référence ρ_0 .

p	43	44	45	46	47	48	49
c_{ρ_1}	1.0	-0.2	0.5	-0.7	0.6	0.0	-0.6
c_{ρ_2}	0.8	0.6	0.8	-0.5	1.0	0.3	0.1
c_{ρ_3}	0.1	0.4	0.2	-0.4	0.4	0.3	1.0
c_{ρ_4}	0.2	-0.1	0.4	-0.5	0.1	-0.2	1.0
c_{ρ_5}	0.4	1.0	1.0	-0.9	0.7	1.0	0.5
c_{ρ_6}	0.4	0.6	0.5	-1.0	0.5	0.8	0.3

TABLE 6.5 – Poses de vérification aléatoires

A l'issue de ces analyses, 50 configurations de mesure ont donc été définies, dont 1 pose initiale, 36 poses d'étalonnage et 13 poses de vérification. Ce nombre est suffisant pour permettre de réaliser un étalonnage de qualité ainsi que sa validation. D'autre part, le nombre de configurations de mesure est suffisamment faible pour permettre de réaliser les mesures sur deux jours, et donc de minimiser l'influence de sources d'erreur non maîtrisées comme l'influence de la température ou de l'humidité puisque les mesures par imagerie, contrairement aux mesures de photogrammétrie, ne seront pas réalisées en salle blanche. De plus, afin d'améliorer la qualité des résultats, 10 poses de répétabilité sont mesurées pour chacune des 50 configurations de mesure.

6.3 Analyse des résultats par imagerie

Les mesures par imagerie ont donc été réalisées pour les 50 configurations de mesure. Pour chaque configuration de mesure, les 7 coefficients des polynômes de Zernike considérés ont été mesurés (de z_4 à z_{10}). De plus, ces mesures ont été effectuées en 9 points du champ de la caméra. En effet, l'utilisation de la plaque multi-trous permet l'observation d'une multitude de taches image dans le champ de la caméra, comme le montre la figure 6.5. La position de ces taches est référencée par la position (X, Y) des pixels de l'image obtenue. Il est alors possible de définir 9 positions dans le champ de la caméra formant une matrice 3×3 comme le montre la figure 6.5 afin d'observer l'influence de la position des taches image dans le champ de la caméra sur les coefficients des polynômes de Zernike. Les motifs permettent de savoir quelle zone de la plaque multi-trous est observée.

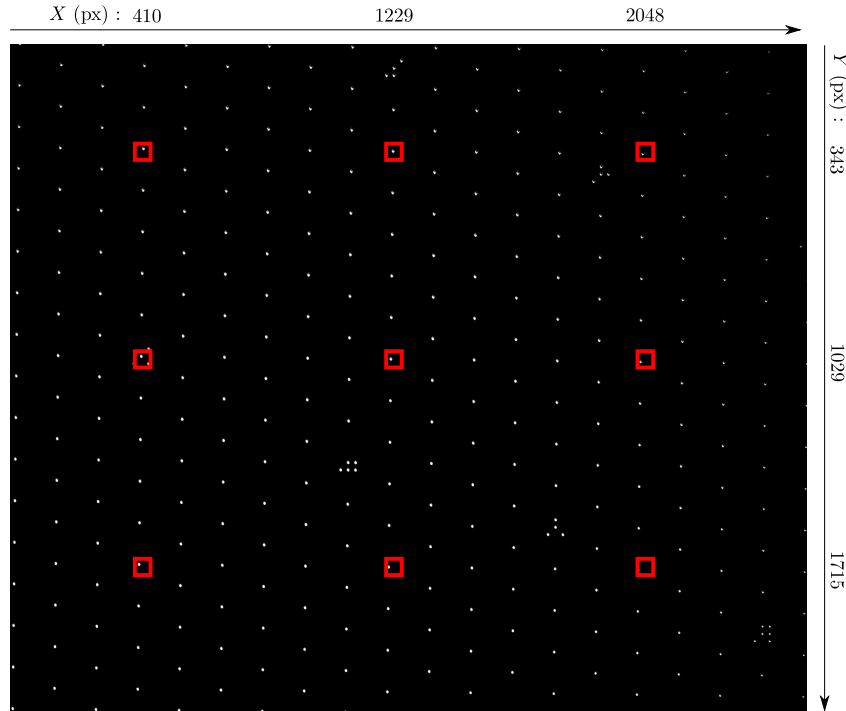


FIGURE 6.5 – Image observée par la caméra du télescope avec la plaque multi-trous.

Pour certaines configurations, les coefficients des polynômes de Zernike n'ont cependant pas pu être mesurés, principalement à cause d'une trop grande sensibilité de leur valeur aux déplacements du miroir secondaire. Ainsi, ces poses doivent être retirées des configurations de mesure. Nous verrons que les poses retirées correspondent principalement à un défaut important du télescope.

D'autre part, une dispersion des mesures est observée grâce aux 10 poses de répétabilité. Une analyse du bruit de mesure est donc nécessaire afin de pouvoir estimer la forme de la densité de répartition. Ces analyses permettront d'estimer la qualité des mesures réalisées et de pouvoir analyser plus finement les résultats d'étalonnage. Nous verrons que ce bruit peut être modélisé par une gaussienne autour de la valeur moyenne, après avoir préalablement filtré les mesures aberrantes.

6.3.1 Analyse du bruit de mesure

Il n'est pas envisageable de réaliser des statistiques seulement sur les 10 poses de répétabilité mesurées pour chaque configuration. Dans un premier temps, il faut donc déterminer les paramètres influençant le bruit de mesure. Deux hypothèses sont considérées : le bruit de mesure dépend du point du champ considéré, et le bruit de mesure dépend du coefficient des polynômes de Zernike mesuré.

Afin de valider ou d'infirmer ces hypothèses, la densité de répartition des mesures est tracée pour chaque jeu de 10 mesures de répétabilité, en fonction de la localisation des points dans le champ de la caméra (figure 6.7) et en fonction des coefficients des polynômes de

Zernike mesurés (figure 6.8). Pour pouvoir superposer les courbes de densité de répartition, la valeur moyenne de chaque coefficient des polynômes de Zernike est d'abord calculée sur les 10 poses de répétabilité, avant d'être retranchée aux mesures. Ceci permet d'obtenir des courbes centrées en 0. Ensuite, la densité de probabilité est estimée par noyau uniforme avec la fonction *ksdensity* de MATLAB. L'estimation par noyau uniforme permet d'obtenir la forme de la distribution par histogramme comme l'illustre la figure 6.6.

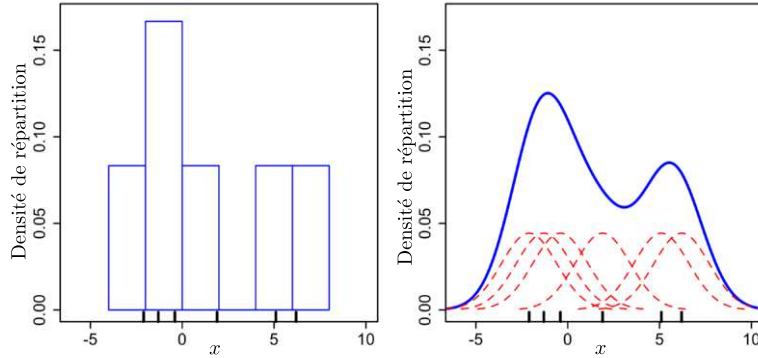


FIGURE 6.6 – *Histogramme de répartition (gauche) et estimation par noyau gaussien (droite) construits avec les mêmes données. Les 6 noyaux individuels sont tracés en pointillés rouges et l'estimation par noyau en bleu. © Matlab*

Sur la figure 6.7, chaque courbe représente l'estimation de la densité de répartition des mesures des 10 poses de répétabilité, pour un coefficient des polynômes de Zernike et une configuration de mesure. On observe que les courbes ne se superposent pas. De plus, les mêmes graphiques sont obtenus en chaque point du champ. Ainsi, le bruit de mesure ne dépend pas, ou peu, du point du champ considéré.

Sur la figure 6.8, chaque courbe continue représente l'estimation de la densité de répartition des mesures des 10 poses de répétabilité, pour chaque configuration de mesure et chaque point du champ. Les courbes se superposent bien, ce qui valide l'hypothèse que le bruit de mesure dépend du coefficient des polynômes de Zernike considéré. Cependant, les densités de répartition sont mal estimées par une gaussienne (courbe verte pointillée sur la figure 6.8). Ceci est en réalité dû à certaines valeurs aberrantes qui doivent être filtrées, comme le montre la figure 6.9.

Sur la figure 6.9 est tracée en trait continu l'estimation de la densité de répartition de toutes les mesures centrées en leur moyenne, pour tous les points du champ et toutes les configurations de mesure. En considérant l'ensemble des mesures, cette densité de répartition peut être approchée par une gaussienne d'écart type σ . Comme le montre la figure 6.8, cette gaussienne approche mal les densités de répartition à cause de certaines mesures aberrantes. En supprimant les mesures en dehors de l'intervalle $[-2.3\sigma; 2.3\sigma]$ avec σ l'écart type de cette première gaussienne, on obtient une nouvelle gaussienne tracée en pointillés rouges sur la figure 6.9, dont le nouvel écart type ainsi que le pourcentage de mesures supprimées sont explicitement donnés en figure 6.9. Cette nouvelle gaussienne modélise bien le bruit de mesure des coefficients des polynômes de Zernike.

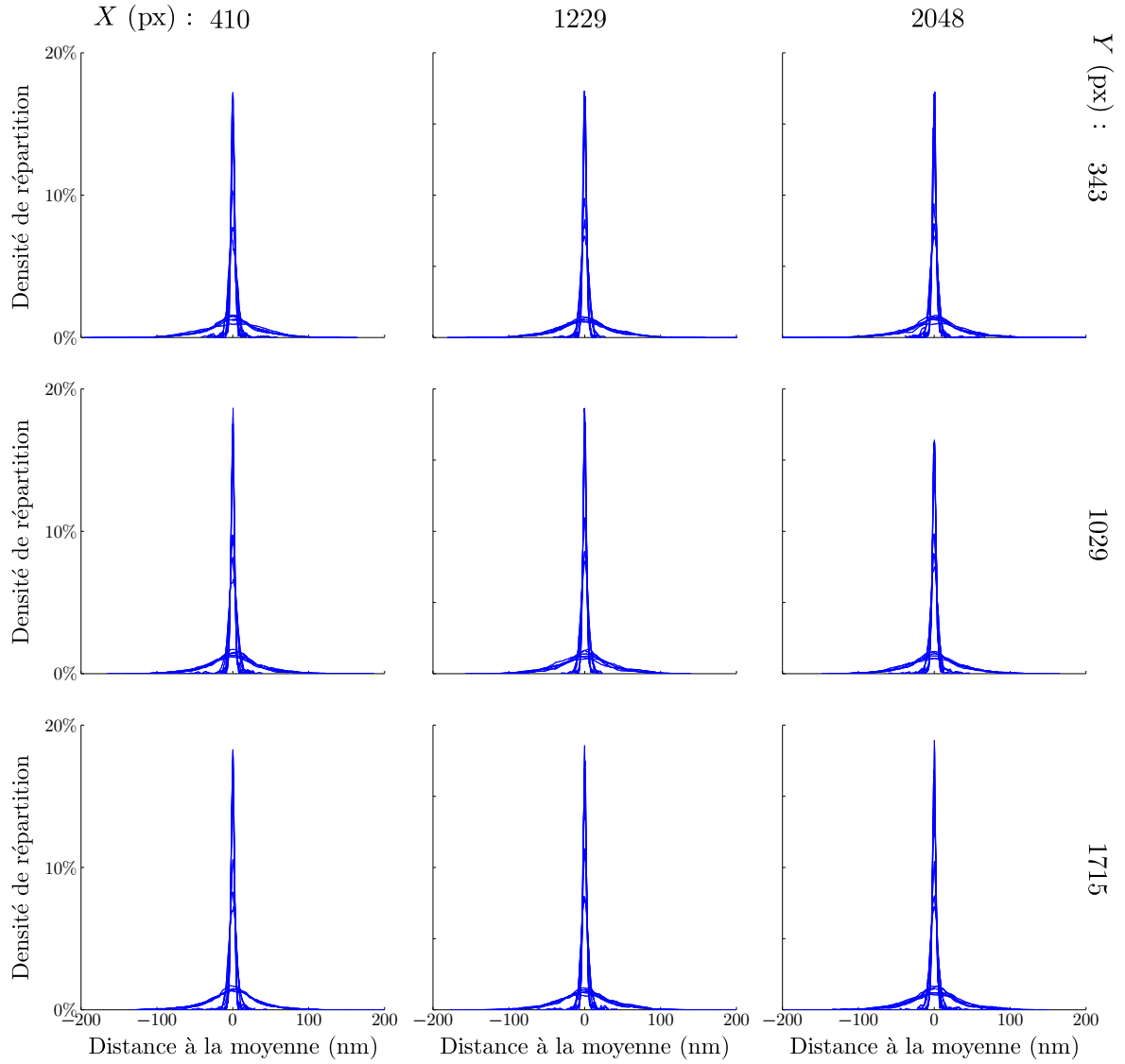


FIGURE 6.7 – Estimation par noyau uniforme des densités de répartition de chaque coefficient des polynômes de Zernike pour chaque configuration de mesure, en fonction de la position (X, Y) du point du champ considérée.

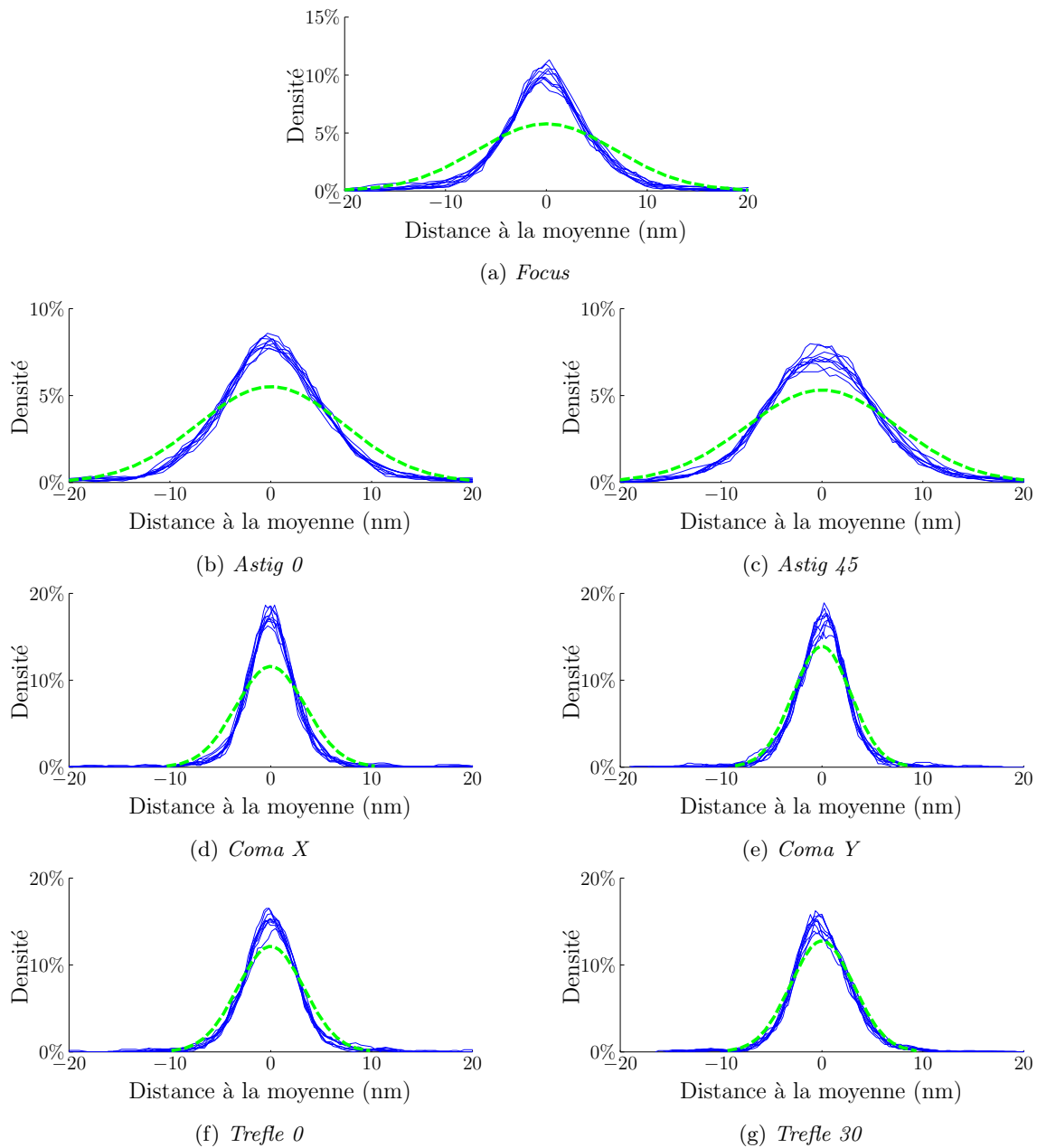


FIGURE 6.8 – Densités de répartition des coefficient des polynômes de Zernike correspondant aux défauts de focus, astig0, astig45, comaX, comaY, trefle0 et trefle30 pour chaque point et chaque configuration de mesure. La courbe pointillée est l'approximation par une gaussienne de la densité de répartition totale.

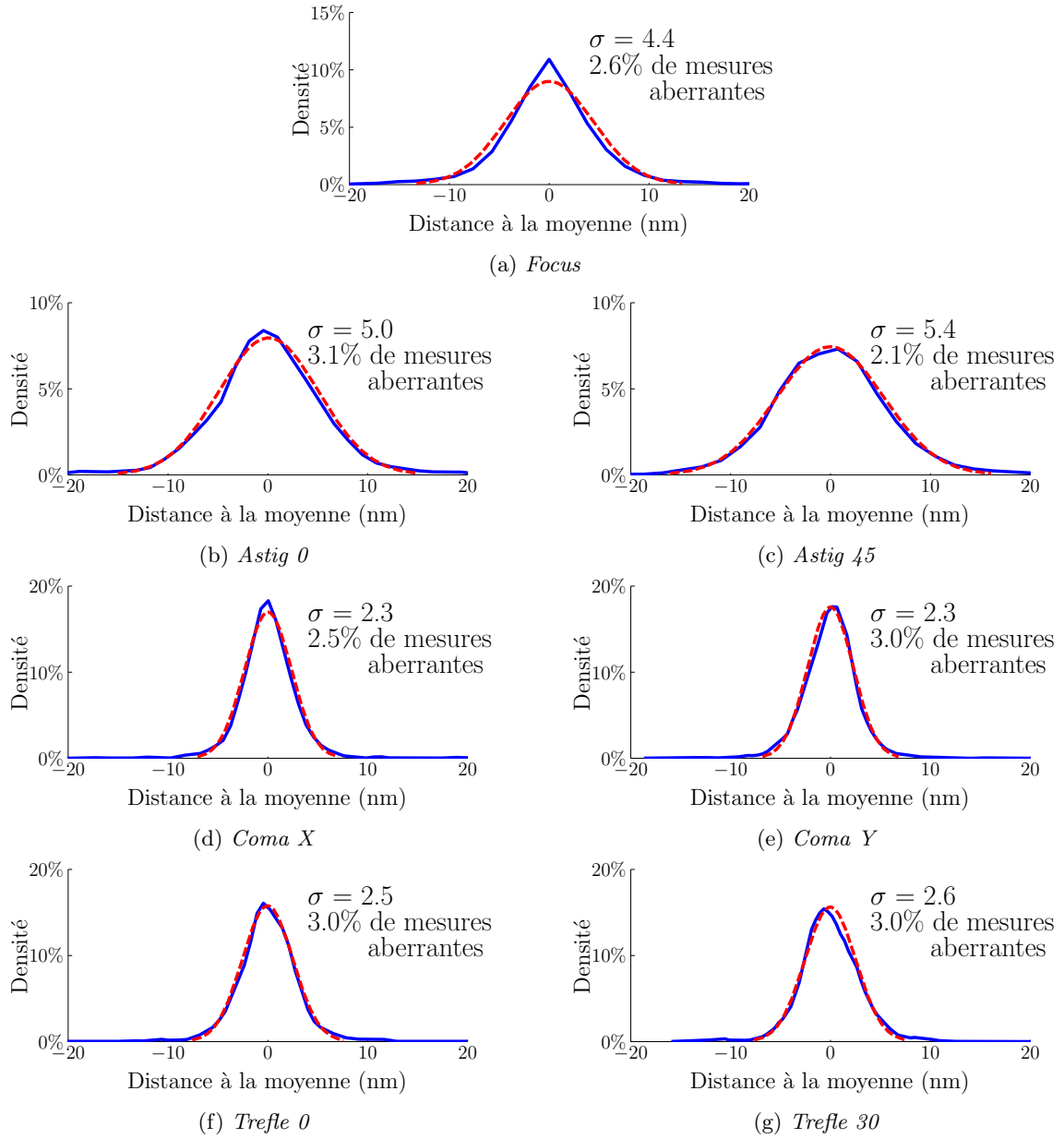


FIGURE 6.9 – Densités de répartition des coefficient des polynômes de Zernike correspondant aux défauts de focus, astig0, astig45, comaX, comaY, trefle0 et trefle30 pour tous les points et toutes les mesures et son approximation par une gaussienne (pointillé rouge) après filtrage des valeurs aberrantes.

6.3.2 Effet du bruit de mesure sur les configurations mesurées

L'analyse du bruit de mesure par l'intermédiaire de la figure 6.9 permet d'obtenir une estimation du bruit de mesure pour chaque coefficient des polynômes de Zernike mesuré. De plus, cette analyse permet de filtrer les valeurs jugées aberrantes. Nous proposons d'observer pour quelles configurations de mesure les valeurs aberrantes ont été mesurées. Pour cela, le nombre de points du champ pour lesquels au moins 4 mesures parmi les 10 de répétabilité sont considérées bruitées est explicitement donné dans le tableau 6.6, pour chacun des 7 coefficients des polynômes de Zernike considéré. Les colonnes grisées du tableau 6.6 correspondent aux configurations pour lesquelles les coefficients des polynômes de Zernike n'ont pas pu être mesurés par une analyse des images.

	max(O2) en fonction des $\rho - \rho^0$												max(O2) en fonction des $\mathbf{X} - \mathbf{X}^0$											
Poses	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Focus		1	2												X						X			
Astig0															X						X			
Astig45		2	2												X						X			
ComaX				1											X						X			
ComaY		3	2												X						X			
Trefle0		1	1												X						X			
Trefle30															X						X			

	max(O1) en fonction des $\rho - \rho^0$												Issues de la SVD						Aléatoires									
Poses	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49			
Focus		2	1	X	1			1	1	X		X	X									X						
Astig0		2		X	1			1	1	X		X	X									X						
Astig45		1	2	X						X		X	X									X			1			
ComaX		2		X	2				2	X		X	X									X						
ComaY		1	1	X						1	X		X	X								X						
Trefle0		2		X	1			1		X		X	X									X						
Trefle30		2		X			4			X		X	X									X			1			

TABLE 6.6 – Analyse des mesures réalisées sur les 50 configurations. Les colonnes grisées correspondent à des poses n'ayant pas pu être mesurées. Les chiffres dans les colonnes correspondent au nombre de points du champ pour lesquels le coefficient des polynômes de Zernike n'a pu être mesuré.

En observant les déplacements du télescope, il apparaît que les configurations non-mesurées (colonnes grisées) correspondent à un important déplacement du miroir secondaire suivant \mathbf{z}_o . En effet, les poses 15 et 21 correspondent à un déplacement maximal suivant \mathbf{z}_o de la plate-forme mobile dans l'espace de travail du télescope. De même, la pose 37 est censée exciter principalement le défaut de focus, ce qui correspond à un déplacement vertical du miroir secondaire comme le montre l'analyse de la décomposition en valeurs singulières de la matrice opto-mécanique initiale réalisée en section 6.2.2.3. Parmi les configurations non-mesurées, seule la pose 34 ne correspond pas à un déplacement important selon l'axe \mathbf{z}_o de la plate-forme mobile, mais plutôt à une rotation suivant \mathbf{x}_o . Le tableau 6.6 montre aussi que parmi les configurations choisies en considérant le produit des valeurs singulières de la matrice d'observabilité \mathbf{G}_ξ (poses 25 à 36 relatifs à O1), beaucoup de coefficients des polynômes de Zernike sont difficilement mesurables. En effet, ces configurations sont principalement situées en frontière de l'espace de travail et une faible variation de déplacement du miroir secondaire a de grandes conséquences sur les coefficients des polynômes de Zernike. Dans ces conditions, il est difficile d'obtenir une mesure de bonne qualité puisque les mesures sont réalisées avec

une connaissance approximative du modèle opto-mécanique.

Étant donné qu'une mauvaise approximation d'un des coefficients des polynômes de Zernike peut avoir des conséquences sur les mesures des autres coefficients [Her81], il est préférable de ne pas considérer les poses bruitées dans l'algorithme d'étalonnage. Ainsi, les poses 2, 3, 26, 27, 29, 31, 32, 33 et 49 sont retirées du jeu des poses à considérer pour l'étalonnage. Cette hypothèse a aussi été vérifiée par l'analyse des résultats d'étalonnage. Il ne reste donc plus que 23 configurations de mesure pour réaliser l'étalonnage et 10 pour la vérification. Étant donné que seulement 3 configurations de mesure ont pu être mesurées sur les 12 issues de l'optimisation du produit des valeurs singulières de la matrice d'identification, il ne sera donc pas possible de comparer les effets de $O1$ et $O2$ sur les résultats d'étalonnage. Nous pouvons cependant remarquer que beaucoup de coefficients des polynômes de Zernike sont difficilement mesurables sur les 12 poses issues de l'optimisation du produit des valeurs singulières. Ceci est dû au fait que l'obtention de la mesure des coefficients des polynômes de Zernike requière une estimée initiale de ces derniers qui est obtenue par l'intermédiaire du modèle opto-mécanique initial. Plus les coefficients des polynômes de Zernike sont excités, plus le modèle initial calculé au centre de l'espace de travail peut donner des résultats éloignés du coefficient réel et plus ce dernier est difficile à calculer. Ainsi, les configurations optimisées en considérant $O1$ semblent effectivement être les configurations qui excitent le plus l'ensemble des coefficients des polynômes de Zernike, ceux-ci devenant alors difficilement mesurables avec le modèle opto-mécanique initial.

6.4 Modèles opto-mécaniques développés

Au regard de l'analyse des mesures par imagerie, il est possible d'améliorer la qualité optique du télescope par étalonnage par imagerie puisque le bruit des mesures sur les coefficients des polynômes de Zernike est de l'ordre de 5nm tandis que les coefficients des polynômes de Zernike mesurés pour la pose de référence ρ^0 sont de l'ordre d'une vingtaine de nanomètres (sauf pour le focus, plus proche de la centaine de nanomètres). Afin d'améliorer cette qualité optique, il est alors nécessaire de développer des modèles opto-mécaniques avant de pouvoir réaliser l'étalonnage.

6.4.1 Modèles linéaires

Dans un premier temps, l'objectif est de mieux estimer les paramètres du modèle initial qui relie les 7 coefficients des polynômes de Zernike \mathbf{z} considérés aux déplacements des actionneurs par rapport à leur position de référence ρ^0 :

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}_\rho(\rho - \rho^0) \quad (6.14)$$

Cependant, la position de référence n'est pas forcément la position pour laquelle la qualité optique du télescope est optimale. Afin de permettre l'identification de la pose optimale ρ^{opt} , celle-ci doit être considérée dans (6.14) :

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{M}_\rho(\rho - \rho^0 + \rho^0 - \rho^{\text{opt}}) \\ &= \mathbf{M}_\rho(\rho - \rho^0) + \mathbf{M}_\rho(\rho^0 - \rho^{\text{opt}}) \\ &= \mathbf{m}_\rho^0 + \mathbf{M}_\rho(\rho - \rho^0) \end{aligned} \quad (6.15)$$

avec \mathbf{m}_ρ^0 un vecteur constant permettant de considérer l'écart entre la pose de référence ρ^0 et celle de qualité optique optimale ρ^{opt} .

La qualité optique du télescope dépend principalement du positionnement relatif du miroir secondaire par rapport au miroir primaire, et donc du positionnement de la plate-forme mobile par rapport à la base. Il semble donc intéressant de considérer le positionnement \mathbf{X} de la plate-forme mobile pour le modèle optique, avec $\mathbf{X} = [\mathbf{p}^T, \theta \mathbf{v}^T]^T$, θ et \mathbf{v} étant respectivement l'angle et l'axe de rotation de la matrice d'orientation \mathbf{R} de la plate-forme mobile :

$$\mathbf{z} = \mathbf{m}_x^0 + \mathbf{M}_x(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0) \quad (6.16)$$

Afin de calculer le positionnement \mathbf{X} de la plate-forme mobile à partir de la mesure ρ de la position des actionneurs, le modèle géométrique du 6-PUS avec le *modèle découplé* de déformation de la plate-forme mobile seront considérés, ces modèles ayant précédemment été validés et étalonnés grâce aux mesures de photogrammétrie (voir chapitre 5).

Le chapitre précédent a aussi permis de mettre en évidence que le modèle cinématique pouvait être approché par une matrice jacobienne \mathbf{J}_0^{-1} constante sur le faible espace de travail du télescope, tel que :

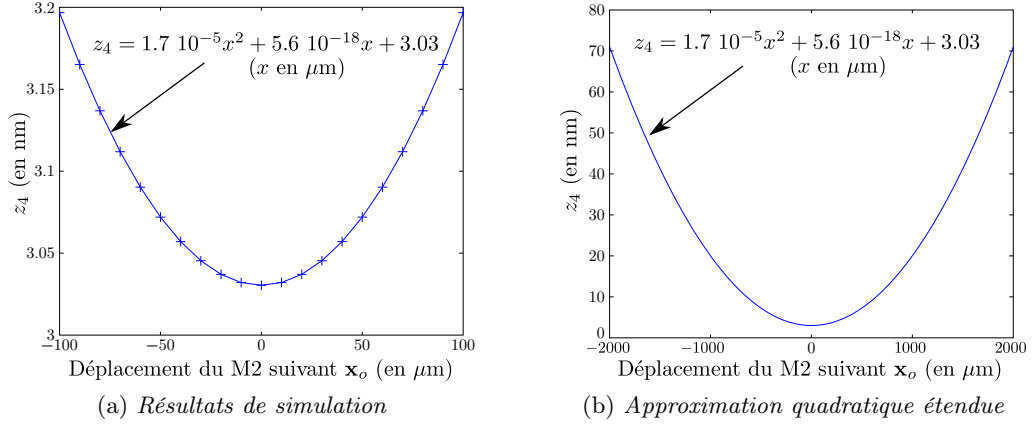
$$\rho - \rho^0 = \mathbf{J}_0^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0) \quad (6.17)$$

De plus, nous avons vu que la déformation de la plate-forme mobile pouvait être directement prise en compte dans la position des actionneurs. Ainsi, cette déformation pourra directement être prise en compte dans l'identification des termes de \mathbf{M}_ρ . Nous nous attendons donc à obtenir des résultats similaires pour les deux modèles opto-mécaniques linéaires, en fonction de la position des actionneurs et du positionnement de la plate-forme mobile.

6.4.2 Modèles quadratiques

Les coefficients des polynômes de Zernike n'ont parfois pas pu être mesurés pour les configurations situées aux frontières de l'espace de travail. Ceci peut être dû à une mauvaise estimation initiale de la matrice opto-mécanique ou à un mauvais choix de modèle du comportement optique du télescope. Des simulations informatiques réalisées par Thales Alenia Space ont permis de mettre en évidence une relation quadratique entre les déplacements du miroir secondaire et les coefficients des polynômes de Zernike, comme le montre la figure 6.10 représentant les variations du coefficient z_4 , relatif au défaut de focus, en fonction d'un déplacement du M2 suivant l'axe \mathbf{x}_o . Les simulations ont cependant été réalisées pour de faibles déplacements du M2 : $\pm 100\mu\text{m}$. Considérer un modèle quadratique entre le coefficient des polynômes de Zernike z_4 relatif au défaut de focus et le déplacement du M2 suivant l'axe \mathbf{x}_o , et l'étendre pour des amplitudes de déplacements de $\pm 2\text{mm}$ permet l'obtention de la figure 6.10.b. L'amplitude de $\pm 2\text{mm}$ correspond aux déplacements du M2 réalisés pour les configurations de mesure $n^\circ 13$ et 19 , sensées exciter au maximum les coefficients des polynômes de Zernike par rapport à un déplacement du M2 suivant l'axe \mathbf{x}_o . La variation de $\pm 70\text{nm}$ de z_4 est alors semblable aux mesures effectuées pour ces configurations.

Sur le même modèle que précédemment, deux modèles quadratiques sont donc considérés pour le modèle opto-mécanique du télescope : en fonction des positions des actionneurs avec (6.18) et du positionnement du miroir secondaire avec (6.19). Rappelons que $\text{diag}(\mathbf{x})$ est une

FIGURE 6.10 – Variation du défaut de focus en fonction du déplacement du M2 suivant l'axe \mathbf{x}_o

matrice carrée dont les termes diagonaux sont les éléments du vecteur \mathbf{x} . Ainsi, $\text{diag}(\mathbf{x}).\mathbf{x}$ renvoie un vecteur de la même dimension que \mathbf{x} dont toutes ses composantes sont élevées au carré.

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}_\rho^o + \mathbf{Q}_\rho^1 (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) + \mathbf{Q}_\rho^2 \text{diag}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) \quad (6.18)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}_\mathbf{x}^o + \mathbf{Q}_\mathbf{x}^1 (\mathbf{X} - \mathbf{X}^0) + \mathbf{Q}_\mathbf{x}^2 \text{diag}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0) (\mathbf{X} - \mathbf{X}^0) \quad (6.19)$$

avec \mathbf{q}_ρ^o et $\mathbf{q}_\mathbf{x}^o$ des vecteurs constants permettant de considérer l'écart entre la pose de référence et celle de qualité optique optimale, et \mathbf{Q}_ρ^1 , \mathbf{Q}_ρ^2 , $\mathbf{Q}_\mathbf{x}^1$ et $\mathbf{Q}_\mathbf{x}^2$ des matrices de coefficients.

Afin de pouvoir choisir entre les modèles linéaires et quadratiques, fonctions des positions des actionneurs et du positionnement du miroir secondaire, chaque modèle sera étalonné avec les mesures obtenues par imagerie, selon la méthodologie utilisée dans le chapitre 5.

6.5 Résultats expérimentaux

Comme pour le chapitre précédent, le moyen de mesure le plus précis à disposition a été utilisé pour réaliser les mesures par imagerie. Le bruit de mesure sur chaque coefficient des polynômes de Zernike peut être estimé à 5nm grâce à l'analyse des mesures réalisées en figure 6.9. La précision nécessaire des paramètres des modèles peut alors être estimée à partir de la condition nécessaire à l'étalonnage rappelée ci-dessous :

$$\forall p = 1..N_p, \quad \text{abs}(\mathbf{G}_m^p) \Delta \mathbf{m}^{\max} + \text{abs}(\mathbf{G}_\rho^p) \Delta \boldsymbol{\rho} < \text{abs}(\mathbf{G}_\xi^p) \Delta \boldsymbol{\xi}^{\text{nec}} \quad (6.20)$$

En considérant le j^{eme} coefficient des polynômes de Zernike z_j et le modèle opto-mécanique linéaire en fonction des positions des actionneurs, cette condition peut s'écrire, avec \mathbf{m}_j la j^{eme} ligne de \mathbf{M}_ρ et m_j^0 la j^{eme} composante de \mathbf{m}_ρ^0 :

$$\Delta z_j + \text{abs}(\mathbf{m}_j) \Delta \boldsymbol{\rho} < \Delta m_j^0 + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0)^T \Delta \mathbf{m}_j^T \quad (6.21)$$

Afin d'estimer $\text{abs}(\mathbf{m}_j)\Delta\rho$ pour l'ensemble des coefficients des polynômes de Zernike, la matrice opto-mécanique initiale \mathbf{M} de (6.7) est considérée, ce qui donne, avec $\Delta\rho_i = 1\mu\text{m}$:

$$\text{abs}(\mathbf{M})\Delta\rho = [3.3 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.1]^T \text{ (en nm)} \quad (6.22)$$

En considérant que tous les coefficients de \mathbf{m}_j doivent être connus avec la même précision Δm_j puisque l'influence de chaque actionneur devrait être identique pour chaque coefficient des polynômes de Zernike, et en notant que le déplacement maximal d'un actionneur par rapport à sa position de référence est de $\pm 1\text{mm}$, alors (6.21) peut s'écrire :

$$5\text{nm} + 3\text{nm} < \Delta m_j^0 + 6 \Delta m_j \text{ (en nm)} \quad (6.23)$$

Une façon de garantir la condition de (6.21) nécessaire à l'étalonnage est alors de choisir $\Delta m_j^0 = 2\text{nm}$ et $\Delta m_j = 1$, ce qui permet de définir un critère d'arrêt pour l'algorithme d'étalonnage, comme expliqué dans le chapitre 3. Les précisions Δm_j^0 et Δm_j permettent aussi l'étalonnage du modèle linéaire en fonction du positionnement du miroir secondaire. En ce qui concerne les modèles quadratiques, aucune estimation des matrices \mathbf{Q}_ρ^1 , \mathbf{Q}_ρ^2 , \mathbf{Q}_x^1 et \mathbf{Q}_x^2 n'est disponible, ce qui ne permet pas le calcul de (6.20). Dans un premier temps, les mêmes critères d'arrêt seront considérés, c'est-à-dire $\Delta q_j^0 = 2\text{nm}$ et $\Delta q_j = 1$, avec q_j^0 le j^{eme} élément de \mathbf{q}_ρ^0 (ou \mathbf{q}_x^0) et q_j un des éléments de la j^{eme} ligne de \mathbf{Q}_ρ^1 ou \mathbf{Q}_ρ^2 (ou \mathbf{Q}_x^1 et \mathbf{Q}_x^2).

Avec ces critères d'arrêt, l'étalonnage est réalisé à partir des mesures par imagerie pour chaque point du champ indépendamment, et pour chaque modèle développé. Quel que soit le modèle considéré, tous les paramètres sont identifiables. Nous observerons des résultats similaires en considérant les positions des actionneurs ou le positionnement du miroir secondaire. En effet, les résultats d'étalonnage par imagerie confirment que le modèle cinématique du télescope peut être approché par une matrice jacobienne constante sur l'espace de travail. D'autre part, une sensibilité des coefficients des polynômes de Zernike à la position des points du champ considérés sera observée et modélisée.

6.5.1 Pour les modèles linéaires

Les résultats d'étalonnage sont donnés en figure 6.11 en terme d'erreur commise sur les poses de vérification pour chaque coefficient des polynômes de Zernike considéré et en chaque point du champ. Les erreurs sont normalisées par rapport aux erreurs maximales commises sur les poses de vérification avec le modèle initial. Chaque barre a la taille de l'erreur maximale commise sur les poses de vérification, et la barre additionnelle représente l'erreur moyenne.

L'analyse de la figure 6.11 montre que les résultats sont identiques pour les deux modèles linéaires utilisant les positions des actionneurs ou le positionnement du miroir secondaire. Ceci s'explique par le fait que le modèle cinématique reliant les positions des actionneurs au positionnement de la plate-forme mobile peut être approché par une jacobienne constante sur le faible espace de travail du télescope. En effet, d'une part les constantes \mathbf{c}_ρ^0 et \mathbf{c}_x^0 sont identiques pour les deux étalonnages, sauf pour les défauts de focus où un écart de 2nm peut être observé, négligeable par rapport au bruit de mesure. D'autre part, les matrices de coefficients \mathbf{M}_ρ et \mathbf{M}_x identifiées suivent la relation $\mathbf{M}_\rho = \mathbf{M}_x \mathbf{J}^0$, avec \mathbf{J}^0 la jacobienne cinématique identifiée par photogrammétrie en modélisant la déformation de la plate-forme

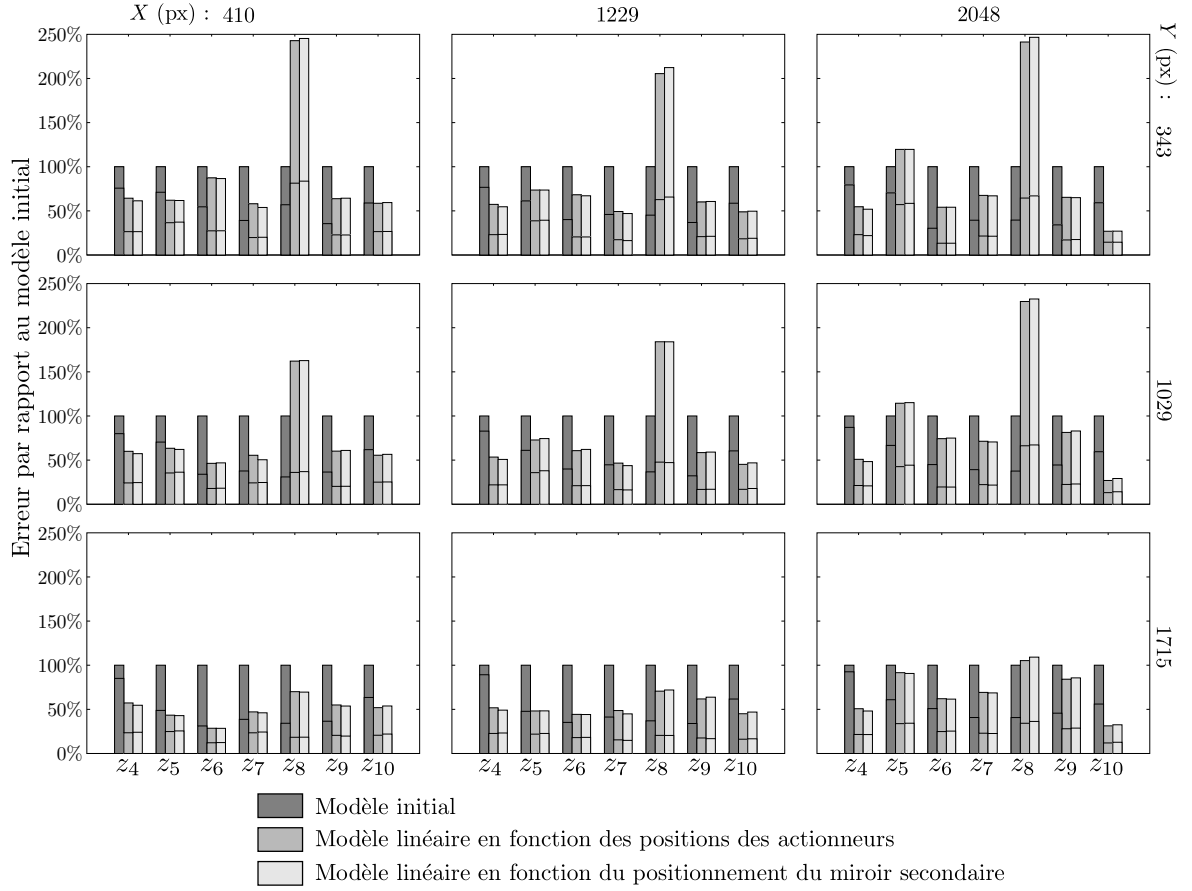


FIGURE 6.11 – Distance entre les mesures et les coefficients des polynômes de Zernike estimés après étalonnage sur les poses de vérification en fonction de la position (X, Y) du point du champ considéré, pour les modèles linéaires fonction des positions des actionneurs et du positionnement du miroir secondaire. Les erreurs sont normalisées par rapport à l'erreur maximale commise sur les poses de vérification avec le modèle initial. Chaque barre a la taille de l'erreur maximale commise sur les poses de vérification et la barre additionnelle représente la moyenne des erreurs.

mobile par le *modèle découplé*. Une erreur ε moyenne de 0.7% et maximale de 4.8% a été calculée avec (6.24), ce qui valide le fait que le modèle cinématique peut être approché par une matrice constante sur l'intégralité de l'espace de travail du télescope.

$$\varepsilon = \frac{\text{abs}(\mathbf{M}_\rho)(\boldsymbol{\rho}^{\max} - \boldsymbol{\rho}^0) - \text{abs}(\mathbf{M}_x \mathbf{J}_0)(\boldsymbol{\rho}^{\max} - \boldsymbol{\rho}^0)}{\text{abs}(\mathbf{M}_\rho)(\boldsymbol{\rho}^{\max} - \boldsymbol{\rho}^0)} \quad (6.24)$$

Cette analyse des résultats d'étalonnage montre que la déformation de la plate-forme mobile peut être automatiquement prise en compte lors de l'identification du modèle opto-mécanique linéaire en fonction des positions des actionneurs. De plus, le modèle géométrique identifié est le modèle cinématique qui a pu être validé par étalonnage photogrammétrique dans le chapitre précédent. Il est donc possible d'identifier convenablement le modèle opto-mécanique du télescope directement à partir des mesures par imagerie et de la position des actionneurs, ce qui valide le fait que le télescope peut être auto-étalonné dans l'espace.

La figure 6.11 permet aussi d'observer que l'estimation des coefficients des polynômes de Zernike est améliorée après étalonnage, sauf pour z_8 relatif au défaut de coma selon y . Étant donné que les configurations de mesure pour l'étalonnage sont principalement situées en frontière de l'espace de travail, il est possible que le modèle linéaire ne soit pas suffisant pour l'estimation de ce coefficient. Dans la section suivante, le modèle quadratique, plus complet, est considéré.

6.5.2 Pour les modèles quadratiques

L'étalonnage avec les modèles linéaires a permis de mettre en évidence des résultats identiques que l'on utilise les positions des actionneurs ou le positionnement du miroir secondaire. Le même phénomène a pu être observé avec les modèles quadratiques, et seuls les résultats en fonction des positions des actionneurs seront donc présentés. Les résultats d'étalonnage sont donnés en figure 6.12 en terme d'erreur commise sur les poses de vérification pour chaque coefficient des polynômes de Zernike considéré et en chaque point du champ. Afin de permettre la comparaison avec le modèle linéaire, les résultats d'étalonnage obtenus avec les modèles initial, linéaire et quadratique sont répertoriés en figure 6.12.

La figure 6.12 permet déjà de constater que les défauts de coma selon y ne sont pas améliorés avec le modèle quadratique. Cependant, l'analyse des résultats d'étalonnage s'avère quelque peu complexe puisque le modèle quadratique améliore faiblement l'estimation de certains coefficients des polynômes de Zernike, et en détériore fortement d'autres. Une façon de permettre l'analyse des résultats est de considérer l'erreur totale de front d'onde (notée WFE pour Wave Front Error). La WFE se calcule à partir des coefficients des polynômes de Zernike, telle que :

$$\text{WFE} = \sqrt{\sum_i z_i^2} \quad (6.25)$$

Pour permettre l'analyse des résultats par imagerie, l'erreur de WFE commise sur les poses d'étalonnage sera considérée selon (6.26), avec z_i^{mes} la mesure par imagerie du i^{eme} coefficient des polynômes de Zernike et z_i^{est} son estimation par les modèles développés. Les résultats sont consignés en tableau 6.7 pour les poses de vérification. Étant donné que les poses de vérification 37 à 42 sont supposées exciter au maximum les coefficients des polynômes de Zernike, les résultats d'erreur de WFE sont donnés en considérant toutes les poses de vérification, puis en enlevant les poses 37 à 42.

$$\varepsilon_{\text{WFE}} = \sqrt{\sum_{i=4}^{10} (z_i^{\text{mes}} - z_i^{\text{est}})^2} \quad (6.26)$$

Modèle	Sur les poses de vérification		Sur les poses de vérification aléatoires	
	ε_{WFE} moyenne	ε_{WFE} maximale	ε_{WFE} moyenne	ε_{WFE} maximale
Linéaire	102	215	75	125
Quadratique	117	210	101	185

TABLE 6.7 – Résultats d'erreur de WFE pour les modèles linéaire et quadratique en fonction des positions des actionneurs sur les poses de vérification.

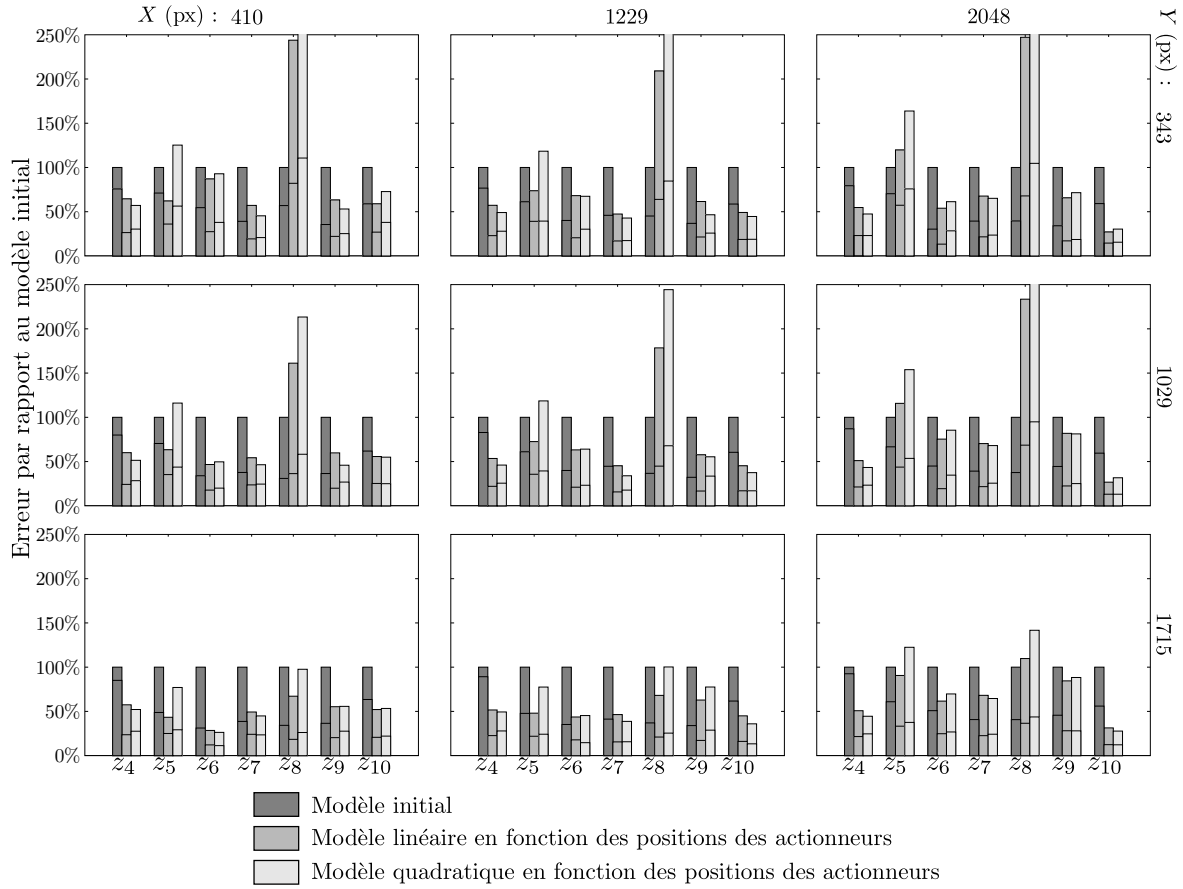


FIGURE 6.12 – Distance entre les mesures et les coefficients des polynômes de Zernike estimés après étalonnage sur les poses de vérification, en fonction de la position (X, Y) du point du champ considéré, pour les modèles linéaire et quadratique fonctions des positions des actionneurs. Les erreurs sont normalisées par rapport à l'erreur maximale commise sur les poses de vérification avec le modèle initial. Chaque barre a la taille de l'erreur maximale commise sur les poses de vérification et la barre additionnelle représente la moyenne des erreurs.

Au regard du tableau 6.7, le modèle linéaire semble procurer de meilleurs résultats en terme d'erreur de WFE pour les poses de vérification aléatoires, c'est-à-dire pour des poses situées au voisinage de la pose de qualité optique optimale. En considérant l'ensemble des poses de vérification, les modèles linéaire et quadratique donnent des résultats similaires. Ce résultat est contraire à ce que nous aurions pu attendre puisque les simulations permettent de conjecturer une relation quadratique entre les déplacements du miroir secondaire et les coefficients des polynômes de Zernike. Une explication possible peut être obtenue en analysant les mesures par imagerie. En effet, les simulations montrent par exemple une relation quadratique entre le coefficient des polynômes de Zernike z_4 et un déplacement du M2 suivant \mathbf{x}_o , comme tracé en figure 6.10. Cependant, en analysant les mesures issues des images pour le défaut de focus, pour les configurations de mesure $n^\circ 13$ et 19 correspondant à un déplacement du M2 suivant \mathbf{x}_o , nous pouvons observer que la variation du coefficient z_4 n'est

pas centrée par rapport à la position initiale de référence, comme le montre le tableau 6.8.

	z_4 mesurée (en nm)
Pour un déplacement de 2mm du M2	5
Pour la pose de référence	19
Pour un déplacement de -2mm du M2	56

TABLE 6.8 – Mesures par imagerie du coefficient des polynômes de Zernike z_4 relatif au défaut de focus pour des valeurs différentes du déplacement du M2 suivant l'axe \mathbf{x}_o , issues des configurations de mesure n° 13 et 19.

Ainsi, il semble que les mesures par imagerie de z_4 pour un déplacement du M2 suivant \mathbf{x}_o ne soient pas situées sur une hyperbole centrée en 0, mais sur une hyperbole décentrée. La zone identifiée est alors fortement linéaire et le modèle quadratique n'en permet pas une meilleure identification. Ce phénomène peut provenir du fait que la position de référence est mal estimée, ce qui semble peu probable dans le cas du télescope puisque cela impliquerait une erreur sur le positionnement du M2 suivant \mathbf{x}_o de l'ordre du millimètre. Une autre explication provient de l'endroit du champ considéré. En effet, par exemple dans le cas du défaut de focus, les simulations montrent un décalage de l'hyperbole, en fonction de l'endroit du champ de la caméra considéré. Ces constatations sont aussi valables pour les autres coefficients des polynômes de Zernike. Ainsi, il peut être intéressant de prendre en compte l'endroit du champ mesuré dans les modèles opto-mécaniques, ce qui est effectué dans la section suivante. De plus, prendre en compte l'endroit du champ dans les modèles opto-mécaniques permet d'augmenter le nombre de mesures disponibles pour réaliser l'étalonnage. En effet, l'étalonnage était précédemment réalisé indépendamment pour chaque point du champ. Considérer l'ensemble des points du champ pour l'étalonnage permet donc d'augmenter le nombre de mesures pour l'identification des paramètres, et pourrait donc permettre une meilleure identification du modèle quadratique par exemple.

6.5.3 Effet de l'endroit du champ sur les coefficients des polynômes de Zernike

Les résultats d'étalonnage obtenus avec les modèles linéaire et quadratique permettent d'observer une dépendance des coefficients des polynômes de Zernike aux endroits du champ de la caméra considérés. En effet, les matrices identifiées, disponibles en Annexe A, sont différentes pour chaque endroit du champ. Afin d'améliorer l'identification des paramètres en augmentant le nombre de mesures disponibles pour réaliser l'étalonnage, il est possible de prendre en compte la dépendance des coefficients des polynômes de Zernike aux endroits du champ de la caméra dans les modèles opto-mécaniques. Ainsi, les constantes \mathbf{c}_ρ^0 et \mathbf{q}_ρ^0 des modèles linéaires et quadratiques dépendent de la position des points du champ (X, Y) , de même que les matrices de coefficients \mathbf{M}_ρ , \mathbf{Q}_ρ^1 et \mathbf{Q}_ρ^2 , ce qui permet d'écrire pour les modèles linéaire et quadratique respectivement :

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}_\rho^0(X, Y) + \mathbf{M}_\rho(X, Y)(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) \quad (6.27)$$

et

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}_\rho^0(X, Y) + \mathbf{Q}_\rho^1(X, Y)(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) + \mathbf{Q}_\rho^2(X, Y) \text{diag}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) \quad (6.28)$$

Les simulations montrent que cette dépendance est de symétrie centrale et correspond à un décalage de la courbe représentant les coefficients des polynômes de Zernike en fonction des déplacements du miroir secondaire. Ainsi, cette dépendance peut être prise en compte par un modèle linéaire, avec (X^0, Y^0) la position de référence dans le champ de la caméra et \mathbf{C}_c^0 et \mathbf{C}_l^1 des matrices constantes :

$$\mathbf{z} = \left(\mathbf{c}_c^0 + \mathbf{C}_l^0 \begin{bmatrix} X - X^0 \\ Y - Y^0 \end{bmatrix} \right) + \left(\mathbf{M}_c^0 + \mathbf{C}_l^1 \begin{bmatrix} X - X^0 \\ Y - Y^0 \end{bmatrix} \right) (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) \quad (6.29)$$

Et pour le modèle quadratique :

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = & \left(\mathbf{q}_c^0 + \mathbf{C}_q^0 \begin{bmatrix} X - X^0 \\ Y - Y^0 \end{bmatrix} \right) + \left(\mathbf{Q}_c^1 + \mathbf{C}_q^1 \begin{bmatrix} X - X^0 \\ Y - Y^0 \end{bmatrix} \right) (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) \\ & + \left(\mathbf{Q}_c^2 + \mathbf{C}_q^2 \begin{bmatrix} X - X^0 \\ Y - Y^0 \end{bmatrix} \right) \text{diag}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) \end{aligned} \quad (6.30)$$

La position (X^0, Y^0) de référence est définie comme la position centrale du champ de la caméra, c'est-à-dire $X^0 = 1229\text{px}$ et $Y^0 = 1029\text{px}$. Notons que l'écart entre cette position de référence et la position idéale peut être pris en compte lors de l'identification des constantes \mathbf{c}_c^0 et \mathbf{M}_c^0 pour le modèle linéaire, et \mathbf{q}_c^0 , \mathbf{Q}_c^1 et \mathbf{Q}_c^2 pour le modèle quadratique.

Afin de valider les modèles développés en fonction du champ, l'étalonnage sera réalisé en ne considérant les mesures par imagerie qu'en 5 points du champ sur les 9 mesurés. Les 5 points du champ choisis pour l'étalonnage sont tous ceux ayant une de leurs coordonnées égale à $X = 1229\text{px}$ ou $Y = 1029\text{px}$. Les résultats d'étalonnage avec les modèles optomécaniques de (6.29) et (6.30) sont donnés en figure 6.13 et 6.14 respectivement. Les erreurs sur l'estimation des coefficients des polynômes de Zernike sont normalisées par rapport aux résultats obtenus sans prendre en compte la position des points du champ, avec les modèles linéaire et quadratique respectivement. Ainsi, les modèles en fonction de la position des points du champ peuvent être validés si les résultats obtenus après identification des paramètres de ces modèles sont identiques ou meilleurs que ceux obtenus pour les modèles linéaire et quadratique étalonnés indépendamment en chaque point du champ.

L'analyse des figures 6.13 et 6.14 permet d'observer que des résultats similaires aux précédents étalonnages sont obtenus avec les modèles de (6.29) et (6.30), hormis pour les défauts d'astigmatisme (relatifs à z_5 et z_6) où les erreurs sur l'estimation des coefficients des polynômes de Zernike sont souvent plus importantes. De plus, un phénomène intéressant peut être observé : les figures 6.13 et 6.14 sont semblables bien que les erreurs soient normalisées par rapport aux résultats d'étalonnage respectivement avec les modèles linéaire et quadratique. Ainsi, le modèle prenant en compte la position des points du champ semble avoir le même impact sur l'estimation des coefficients des polynômes de Zernike, quel que soit le modèle considéré (linéaire ou quadratique).

Nous pourrions alors nous interroger sur la validité du modèle choisi pour prendre en compte l'influence de la position des points du champ sur les coefficients des polynômes de Zernike. Cependant, d'une part prendre en compte la totalité des points du champ pour l'étalonnage procure les mêmes résultats qu'en n'en considérant que 5, et d'autre part augmenter la complexité du modèle pour prendre en compte l'influence de la position des points du

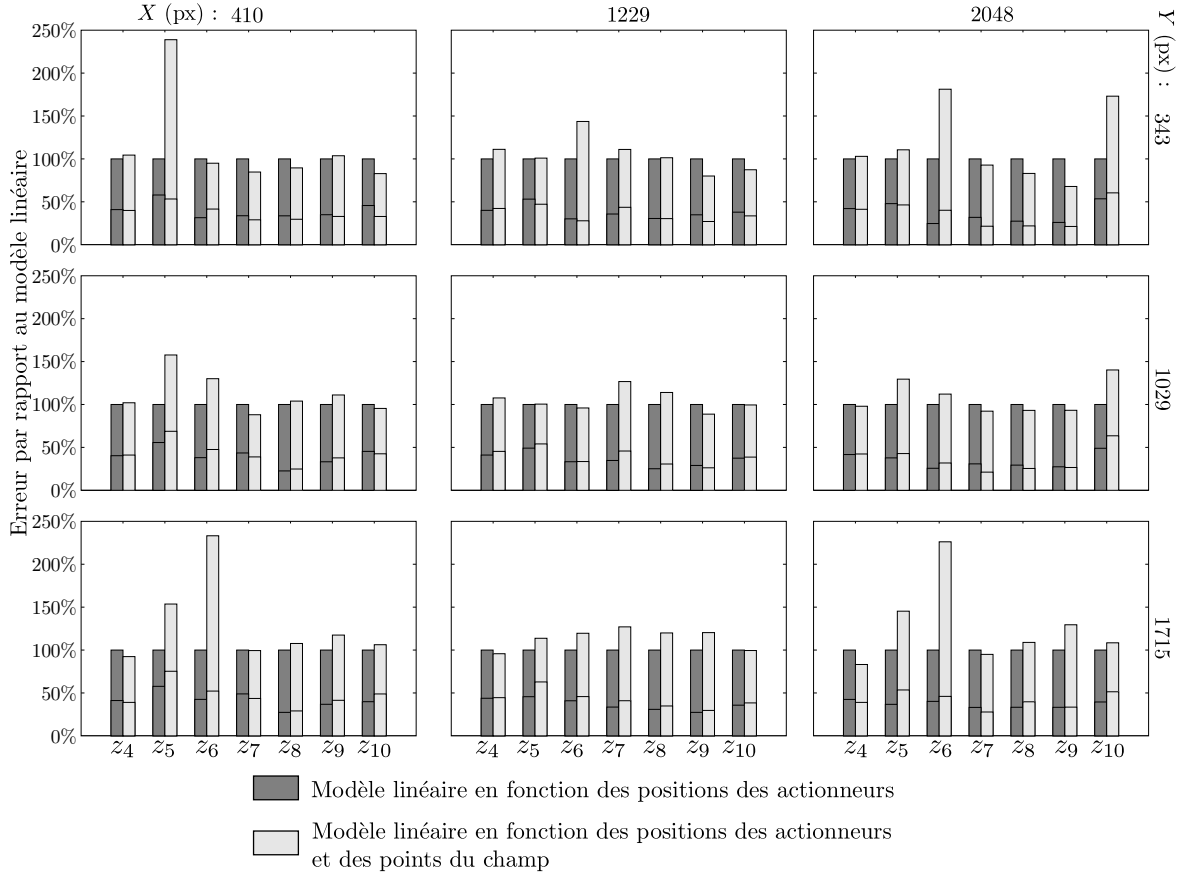


FIGURE 6.13 – Distance entre les mesures et les coefficients des polynômes de Zernike estimés après étalonnage sur les poses de vérification pour les modèles opto-mécaniques linéaires en fonction des positions des actionneurs, avec et sans prise en compte de la position (X,Y) du point du champ considéré. Les erreurs sont normalisées par rapport à l'erreur maximale commise sur les poses de vérification avec le modèle linéaire précédemment étalonné. Chaque barre a la taille de l'erreur maximale commise sur les poses de vérification et la barre additionnelle représente la moyenne des erreurs.

champ sur les coefficients des polynômes de Zernike n'améliore pas les résultats d'étalonnage. Par exemple, prendre en compte un modèle quadratique en fonction de la position des points du champ tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_\rho^0(X,Y) &= \mathbf{c}_c^0 + \mathbf{C}_l^0 \begin{bmatrix} X - X^0 \\ Y - Y^0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_l^1 \begin{bmatrix} (X - X^0)^2 \\ (Y - Y^0)^2 \end{bmatrix} \\ \text{et } \mathbf{M}_\rho^0(X,Y) &= \mathbf{M}_c^0 + \mathbf{C}_l^2 \begin{bmatrix} X - X^0 \\ Y - Y^0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_l^3 \begin{bmatrix} (X - X^0)^2 \\ (Y - Y^0)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.31)$$

procure exactement les mêmes résultats sur l'estimation des coefficients des polynômes de Zernike qu'avec (6.29). Il en va de même en considérant le modèle quadratique de (6.30).

Une explication possible provient alors de la différence entre la simulation et l'expérience. En effet, les données issues de la simulation considèrent le cas idéal. Dans le dispositif expérimental utilisé, décrit dans la section 6.2, le rôle de la lentille optique permettant de simuler

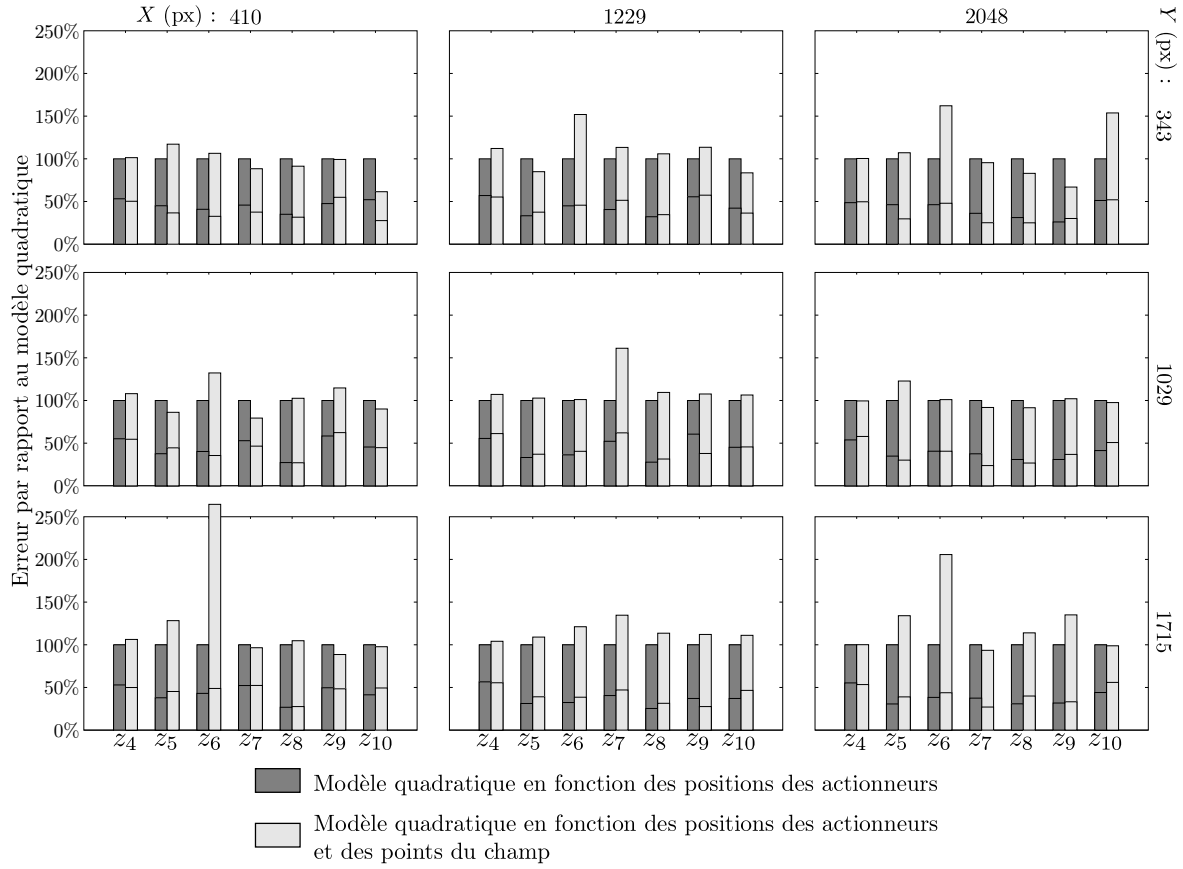


FIGURE 6.14 – Distance entre les mesures et les coefficients des polynômes de Zernike estimés après étalonnage sur les poses de vérification pour les modèles opto-mécaniques quadratiques en fonction des positions des actionneurs, avec et sans prise en compte de la position (X,Y) du point du champ considéré. Les erreurs sont normalisées par rapport à l'erreur maximale commise sur les poses de vérification avec le modèle quadratique précédemment étalonné. Chaque barre a la taille de l'erreur maximale commise sur les poses de vérification et la barre additionnelle représente la moyenne des erreurs.

un objet vu à l'infini par le télescope est joué par un autre télescope, certes précédemment étalonné, mais ayant tout de même des défauts optiques. Si le télescope jouant le rôle de collimateur dans le montage de la figure 6.3 a des défauts d'astigmatisme, même minimes, ces défauts sont alors pris en compte dans les mesures par imagerie et peuvent détériorer la qualité d'étalonnage. Lorsque l'étalonnage est réalisé indépendamment en chaque point du champ, ces défauts peuvent être automatiquement corrigés lors de l'identification des paramètres des modèles, ce qui permet une bonne estimation des coefficients des polynômes de Zernike. Cependant, cette correction n'est pas possible avec les modèles de (6.29) et (6.30) qui prennent en compte la position des points du champ, ce qui détériore les résultats d'étalonnage. Ceci expliquerait aussi pourquoi l'influence de la prise en compte des points du champ sur les résultats d'étalonnage est identique pour les modèles linéaire et quadratique.

Étant donné que l'influence de la prise en compte de la position des points du champ sur

l'estimation des coefficients des polynômes de Zernike est identique pour les modèles de (6.29) et (6.30), que la prise en compte de la totalité des points du champ pour l'étalonnage procure les mêmes résultats qu'en n'en considérant que 5, qu'augmenter la complexité du modèle n'améliore pas les résultats d'étalonnage, et que les résultats d'étalonnage de la figure 6.13 et 6.14 sont semblables avec ou sans prise en compte de la position des points du champ pour la majorité des coefficients des polynômes de Zernike, les modèles de (6.29) et (6.30) peuvent être validés. Ces modèles pourront permettre l'auto-étalonnage du télescope dans l'espace en considérant un plus petit nombre de configurations de mesure que si l'étalonnage avait été réalisé en chaque point du champ indépendamment. En effet, il sera possible dans l'espace d'observer une étoile située à l'infini et ainsi de s'affranchir des défauts optiques du télescope collimateur. De plus, la prise en compte de l'influence des points du champ de la caméra sur les coefficients des polynômes de Zernike dans le modèle opto-mécanique permettra le calcul de la position du point du champ ayant les meilleures propriétés optiques.

Une façon de s'affranchir des défauts optiques du télescope collimateur et de permettre l'identification de son modèle opto-mécanique sur Terre afin de valider les qualités optiques du télescope, est de ne réaliser les mesures par imagerie qu'au voisinage d'une certaine position de référence du télescope. Dans ce cas, les zones optiques sollicitées du télescope collimateur sont petites, et ces défauts optiques pourraient être considérés constants pour l'intégralité des mesures. C'est pourquoi le modèle opto-mécanique initial obtenu par différence finie autour de la position de référence permet une bonne estimation des coefficients des polynômes de Zernike sur les poses de vérification mesurées, celles-ci étant principalement situées au voisinage de cette position de référence. Ainsi, afin de pouvoir choisir entre les modèles opto-mécaniques linéaire ou quadratique, une deuxième campagne de mesures par imagerie est nécessaire. Une façon de choisir les configurations de mesure pour cette deuxième campagne est de considérer les poses ayant les meilleures qualités optiques à partir des modèles linéaire et quadratique identifiés précédemment. Le choix des poses de qualité optique optimale est décrit dans la section suivante.

6.6 Choix des poses de qualité optique optimale

L'étalonnage expérimental a permis de mettre en évidence que les modèles opto-mécaniques développés en fonction de la position des points du champ étaient trop sensibles aux défauts optiques du télescope collimateur. Le choix des poses de qualité optique optimale s'effectuera donc en considérant les modèles opto-mécaniques linéaire et quadratique en chaque point du champ indépendamment. Ces modèles sont rappelés en (6.32) et (6.33) et les valeurs des paramètres identifiés par l'étalonnage par imagerie de la section 6.5 sont données en Annexe A.

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}_\rho^0 + \mathbf{M}_\rho(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) \quad (6.32)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}_\rho^0 + \mathbf{Q}_\rho^1 (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0) + \mathbf{Q}_\rho^2 (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0)^2 \quad (6.33)$$

En considérant les valeurs identifiées des paramètres de chaque modèle, il est possible de déterminer la position $\boldsymbol{\rho}^{\text{opt}}$ des actionneurs pour laquelle la meilleure qualité optique est obtenue en chaque point du champ. La qualité optique peut être exprimée par une valeur chiffrée précédemment définie qui est l'erreur de front d'onde (WFE). La meilleure qualité

optique est obtenue pour la plus petite WFE, fonction des coefficients des polynômes de Zernike telle que :

$$\text{WFE} = \sqrt{\sum_{i=4}^{10} z_i^2} \quad (6.34)$$

Ainsi, déterminer la position $\boldsymbol{\rho}^{\text{opt}}$ des actionneurs revient à minimiser la somme au carré des coefficients des polynômes de Zernike. Ce problème d'optimisation sera traité avec la fonction *lsqnonlin* de MATLAB. Le fait de n'avoir aucune garantie sur l'obtention d'un minimum global n'est pas gênant dans notre cas puisque les poses optimisées serviront pour un nouvel étalonnage par imagerie. Les deux contraintes suivantes sont considérées, permettant respectivement de garantir que la pose optimale sera dans l'espace de travail du télescope et de limiter la rotation suivant \mathbf{z}_o du miroir secondaire, celle-ci étant supposée n'avoir que peu d'influence sur la qualité optique de par la sphéricité des miroirs :

$$\begin{aligned} \text{Espace de travail :} & \quad |\rho_i - \rho_i^0| \leq 1\text{mm} \\ \text{Peu de rotation suivant } \mathbf{z}_o : & \quad \rho_6 = \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 + \rho_5 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Les résultats sont répertoriés pour chaque point du champ dans les tableaux 6.10 pour le modèle linéaire de (6.32) et 6.11 pour le modèle quadratique de (6.33). Les coefficients des polynômes de Zernike \mathbf{z}^{est} estimés par les modèles et la WFE sont aussi donnés.

Même si l'estimation des coefficients des polynômes de Zernike conduit à de faibles défauts optiques d'après les modèles étalonnés, il est à rappeler que les modèles conduisent à des erreurs d'estimation assez importantes : de l'ordre de la dizaine de nanomètres comme le montre le tableau 6.9. Ainsi, les poses pourront judicieusement servir à valider ou à infirmer les modèles proposés, mais ne peuvent pas pour l'instant être considérées comme les poses pour lesquelles la meilleure qualité d'image est obtenue. Une nouvelle campagne de mesure par imagerie est donc nécessaire afin de valider le choix du modèle opto-mécanique à considérer et d'obtenir une meilleure estimation de ses paramètres.

Erreur	Matrice initiale		Linéaire de (6.32)		Quadratique de (6.33)	
	moyenne	maximale	moyenne	maximale	moyenne	maximale
z_4	303	382	84	211	96	189
z_5	49	113	28	96	34	127
z_6	40	168	19	70	25	78
z_7	21	68	11	47	11	46
z_8	10	37	10	46	15	61
z_9	12	38	7	24	9	25
z_{10}	31	57	9	30	10	35

TABLE 6.9 – Erreurs moyennes et maximales commises sur les poses de vérification pour chaque coefficient des polynômes de Zernike, pour les modèles initial, linéaire de (6.32) et quadratique de (6.33) en considérant l'ensemble des points du champ.

Point du champ	410 343	1229 343	2048 343	410 1029	1229 1029	2048 1029	410 1715	1229 1715	2048 1715
$\rho^{\text{opt}} - \rho^0$ (μm)	-253	309	114	-349	307	291	-401	-94	-304
	-254	430	501	-456	190	-210	-531	-276	-502
	112	-435	-788	439	62	817	560	481	657
	-42	-408	-1000	272	168	1000	375	417	485
	170	271	840	-26	-197	-922	-74	-235	-226
	326	123	665	248	-187	-604	242	10	145
\mathbf{z}^{est} (nm)	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
	3	3	-18	3	4	-4	3	2	0
	-1	-1	9	0	0	-1	1	1	1
	-1	0	-1	-1	0	-1	-1	0	-1
	0	0	2	0	0	0	0	0	0
	-11	-5	-12	-14	-8	-13	-15	-11	-14
WFE (nm)	10	4	0	13	9	9	12	10	11
WFE (nm)	15	7	24	19	13	17	20	16	18

TABLE 6.10 – Positions des actionneurs minimisant la somme au carré des coefficients des polynômes de Zernike pour le modèle linéaire de (6.32), pour chaque point du champ.

Point du champ	410 343	1229 343	2048 343	410 1029	1229 1029	2048 1029	410 1715	1229 1715	2048 1715
$\rho^{\text{opt}} - \rho^0$ (μm)	-68	-230	-265	-158	-180	-233	204	-121	-269
	-42	-254	-363	-201	-231	-301	23	-200	-299
	-88	201	418	215	293	393	218	339	376
	-174	52	241	128	163	219	334	252	176
	169	108	-32	29	17	-2	-295	-60	62
	230	281	243	159	197	240	-231	106	292
\mathbf{z}^{est} (nm)	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	15	-2	-4	30	1	-2	23	4	1
	-4	0	8	0	3	8	-6	4	8
	1	0	0	1	0	-1	1	0	-1
	0	0	0	1	0	0	4	0	0
	-4	-7	-15	-9	-11	-15	-17	-12	-13
WFE (nm)	10	10	8	10	11	12	10	13	13
WFE (nm)	19	13	20	33	16	21	31	18	20

TABLE 6.11 – Positions des actionneurs minimisant la somme au carré des coefficients des polynômes de Zernike pour le modèle quadratique de (6.33), pour chaque point du champ.

6.7 Conclusions

Plusieurs modèles opto-mécaniques ont été développés. Dans un premier temps, l'analyse des résultats de l'étalonnage par imagerie a permis de montrer que le modèle cinématique du télescope pouvait être identifié directement à partir des mesures par imagerie et de la position des actionneurs. De plus, considérer le modèle géométrique avec le *modèle découplé* de déformation de la plate-forme mobile identifié dans le chapitre 5 par photogrammétrie n'améliore pas l'estimation des coefficients des polynômes de Zernike. Ceci est dû au fait que le modèle cinématique du télescope est directement identifié dans la matrice opto-mécanique du modèle linéaire en fonction des positions des actionneurs sous la forme d'une matrice jacobienne constante sur l'espace de travail. Les mesures par imagerie valident donc le fait que le comportement du télescope peut être approché par une matrice jacobienne constante sur son espace de travail, ce qui confirme les résultats de l'étalonnage photogrammétrique. De plus, nous avons pu voir que la déformation de la plate-forme mobile était elle aussi automatiquement prise en compte par l'algorithme d'étalonnage lors de l'identification des termes de la matrice opto-mécanique. Ainsi, seule la position des actionneurs peut être considérée pour les modèles opto-mécaniques, ce qui permet l'auto-étalonnage du télescope dans l'espace, uniquement à partir des données par imagerie.

Les résultats d'étalonnage par imagerie montrent aussi une dépendance des coefficients des polynômes de Zernike à l'endroit du champ considéré. Cette dépendance a été modélisée par un modèle dépendant linéairement de la position du champ de la caméra, au regard des résultats issus de simulation. Cependant, l'identification des paramètres de ce modèle génère des erreurs assez importantes sur l'estimation des défauts d'astigmatisme par rapport à un étalonnage considérant indépendamment chacun des points du champ. Ces erreurs ne trouvent pas leur explication dans une augmentation de la complexité du modèle dépendant de la position du champ. De plus, les mêmes erreurs sont observées en considérant les modèles opto-mécanique linéaire et quadratique. Ces déviations semblent donc provenir d'un défaut optique dans le télescope servant de collimateur dans le montage optique, et non d'une mauvaise estimation des paramètres du modèle ou d'un mauvais choix de modèle opto-mécanique. L'analyse des résultats permet toutefois de valider le modèle dépendant linéairement de la position du champ, ce qui permettra l'auto-étalonnage du télescope dans l'espace.

Afin de valider les propriétés optiques du télescope, il est cependant nécessaire de pouvoir réaliser l'étalonnage par imagerie sur Terre. Une façon de s'affranchir des défauts optiques du télescope collimateur est alors de considérer des configurations de mesure étant au voisinage d'une pose initiale. C'est pourquoi le modèle opto-mécanique obtenu par différence finie autour d'une position de référence permet une bonne estimation des coefficients des polynômes de Zernike. Pour pouvoir choisir entre les modèles opto-mécaniques linéaire et quadratique, il est donc nécessaire de réaliser une seconde campagne de mesure par imagerie, en considérant des configurations de mesure proches. Ces configurations de mesure peuvent être choisies comme les poses de qualité optique optimale calculées en chaque point du champ par les modèles linéaire et quadratique étalonnés. Comme d'autres essais étaient réalisés sur le télescope, cette campagne de mesure par imagerie n'a pour l'instant pas pu être réalisée mais est programmée sous peu. Elle fait l'objet d'une continuité de collaboration entre INRIA Sophia Antipolis et Thales Alenia Space.

Conclusion générale

Une nouvelle architecture robotique parallèle pour un télescope d'observation spatial actif a été développée préalablement à cette thèse. L'architecture robotique permet le positionnement du miroir secondaire par rapport au miroir primaire dans l'espace afin d'améliorer la qualité des images générées. Le projet dans lequel s'inscrit le développement de cette nouvelle architecture prévoit aussi le déploiement du télescope dans l'espace. Il est donc nécessaire de pouvoir auto-étalonner le télescope d'observation directement dans l'espace à partir des informations disponibles qui incluent des mesures additionnelles non nécessaires à son contrôle. Le travail réalisé dans cette thèse a permis de valider la possibilité d'auto-étalonnage de la structure du télescope à partir des informations de position de ses actionneurs et d'une analyse des défauts des images.

Tout d'abord, les conditions nécessaires à l'étalonnage ont été développées. Ces conditions reposent sur les hypothèses couramment utilisées et indispensables à l'étalonnage d'une structure robotique, notamment que la fonction d'identification doit dépendre principalement des variations des paramètres du modèle. L'analyse de ces conditions permet le calcul de la précision nécessaire sur les paramètres du modèle afin de garantir la précision statique finale du manipulateur. Il est alors possible de définir le bruit de mesure maximal admissible sur les mesures additionnelles réalisées pour l'étalonnage. Ces deux conditions permettent l'obtention d'un critère d'arrêt de l'algorithme d'étalonnage ayant une réelle signification physique et prenant en compte le bruit de mesure. En ce qui concerne l'identifiabilité des paramètres, celle-ci peut être vérifiée par une analyse des valeurs singulières de la matrice d'identification. Afin de permettre la comparaison de ses valeurs singulières, une normalisation de la matrice d'identification est proposée. Une borne numérique sur le seuil de la plus petite valeur propre de la matrice d'identification normalisée permet alors de prévenir les problèmes d'identifiabilité des paramètres. Pour améliorer l'identifiabilité des paramètres, nous avons aussi pu montrer que le choix des configurations pouvait être optimisé.

L'environnement spatial dans lequel évoluera le télescope impose d'utiliser des articulations flexibles plutôt que des articulations classiques. Plusieurs modèles prenant en compte le comportement des articulations flexibles ont été proposés. La comparaison de ces différents modèles a pu être effectuée par une analyse des résultats d'étalonnage photogrammétrique, en considérant les conditions nécessaires définies précédemment. Les modèles poutre et de raideur ont permis de montrer que le comportement cinématique des articulations flexibles dans leurs zones de fonctionnement pouvait être assimilé à celui d'une rotule parfaite. En ce qui concerne les efforts qu'elles génèrent sur la structure du télescope, ceux-ci impliquent une déformation de la plate-forme mobile. Cette déformation a pu être prise en compte par l'intermédiaire de modèles non-paramétriques *découplé* et *couplé*. L'analyse de ces modèles a permis d'expliquer les écarts observés sur les résultats d'étalonnage. En effet, les algorithmes d'étalonnage prennent automatiquement en compte la déformation de la plate-forme mobile lors de l'identification des paramètres des modèles, ce qui conduit à des valeurs des paramètres éloignées d'une quelconque réalité physique, mais permet tout de même l'obtention de la précision requise. Ces modèles ont donc permis une meilleure analyse des résultats d'étalonnage.

Finalement, nous avons pu voir que le comportement cinématique du télescope pouvait être approché par une jacobienne constante pour le faible espace de travail considéré.

Les modèles mécaniques développés ont ensuite permis de définir des modèles opto-mécaniques pour permettre l'auto-étalonnage du télescope dans l'espace. Les mesures considérées pour l'auto-étalonnage sont des mesures issues de l'analyse des défauts des images. Ces mesures seront facilement réalisables dans l'espace mais ont nécessité un dispositif expérimental spécifique sur Terre. L'analyse des résultats de l'étalonnage par imagerie valide la possibilité d'auto-étalonnage du télescope dans l'espace. En effet, d'une part les résultats confirment que le modèle cinématique du télescope peut être approché par une matrice jacobienne constante sur le faible espace de travail, et d'autre part l'identification des paramètres des modèles opto-mécaniques est réalisable à partir des données par imagerie et permet d'améliorer la qualité de l'image. De plus, un modèle opto-mécanique considérant l'endroit du champ de la caméra a pu être validé, ce qui permettra de diminuer le nombre de configurations de mesure à considérer, et donc un auto-étalonnage rapide du télescope. Cependant, certains résultats d'étalonnage par imagerie sont moins bons qu'avec le modèle opto-mécanique initial obtenu par différence finie autour d'une position de référence. Ces erreurs trouvent leur explication dans les défauts optiques du dispositif expérimental de mesure par imagerie mis en place. Afin de pouvoir s'affranchir de ces défauts pour les mesures par imagerie et donc réaliser un étalonnage de qualité, une seconde campagne de mesures par imagerie sera donc nécessaire. Les configurations de mesure à considérer ont pu être calculées à partir des résultats d'étalonnage pour les modèles opto-mécaniques.

L'ensemble des modèles mécaniques et opto-mécaniques développés dans cette thèse seront utiles pour la validation du télescope réel, et non plus de son prototype, notamment en cas de changement des paramètres de conception. La méthodologie décrite dans cette thèse pourra être utilisée à l'identique et devra s'efforcer de montrer le caractère linéaire du modèle géométrique du télescope afin d'en permettre son auto-étalonnage avec les données issues des images. Si le comportement des articulations flexibles ne peut plus être approché par le comportement d'une rotule parfaite, il sera alors certainement nécessaire d'instrumenter plus lourdement le télescope dans l'espace dans le but d'obtenir plus d'informations proprioceptives sur son état et garantir les performances requises à l'issue de l'étalonnage. Il semble cependant préférable de s'attacher lors de la conception de l'architecture définitive du télescope au comportement des articulations flexibles dans leur zone de fonctionnement afin de garantir le caractère linéaire du modèle géométrique du télescope sur l'ensemble de sa zone de fonctionnement. Dans le cas contraire, il serait alors possible de définir plusieurs sous-espaces de travail dans lesquels le modèle du télescope est linéaire. Cependant, la continuité entre ces sous-espaces, notamment en terme de contrôle du télescope, est toujours difficile à certifier, de même que la façon de découper l'espace de travail total en plusieurs sous-espaces. De plus, dans le cas d'un plus grand espace de travail, des méthodes numériques d'optimisation certifiées devront être considérées afin de garantir l'obtention d'un optimum global.

En ce qui concerne le travail de réflexion mené tout au long de cette thèse sur les conditions nécessaires à l'étalonnage, celui-ci a permis de développer des critères physiques pour détecter les problèmes d'identifiabilité et stopper l'algorithme d'identification. Ces critères pourront utilement être considérés pour tout étalonnage robotique, aussi bien dans le choix

des instruments de mesure que dans l'analyse des résultats d'étalonnage. Certaines conditions sont néanmoins surestimées et nécessiterait une étude plus approfondie, notamment pour détecter la mauvaise identifiabilité des paramètres, problème très sensible pour l'étalonnage. Ces travaux pourraient par exemple considérer des études probabilistes pour modéliser le bruit de mesure et son influence sur les résultats d'étalonnage, ou bien, à l'opposé, utiliser l'analyse par intervalles pour certifier - ou non - la bonne identifiabilité des paramètres. Il en va de même pour la normalisation de la matrice d'identification qui considère le pire des cas : nous pourrions envisager de mettre à l'échelle cette matrice en considérant la nature du bruit de mesure, au lieu de seulement considérer l'erreur maximale commise sur les mesures. Dans ce cas, la difficulté serait reportée sur la modélisation du bruit de mesure : le bruit de mesure d'un capteur est souvent modélisé par une distribution gaussienne mais sa distribution réelle est, en général, inconnue et peut s'écarter très sensiblement d'un modèle gaussien. De plus, l'étalonnage n'utilisant qu'un nombre limité de configurations de mesure, l'influence de la répartition du bruit sur les résultats d'étalonnage serait à prendre en compte.

Le développement des conditions d'étalonnage a aussi permis de mettre en évidence l'importance du choix des configurations de mesure. Ce choix permet d'une part d'améliorer l'identifiabilité des paramètres mais aussi de satisfaire l'hypothèse nécessaire à l'étalonnage qui est que la variation de la valeur de la fonction d'identification doit dépendre principalement de la variation des paramètres du modèle. L'écriture mathématique de cette hypothèse en (3.13) a permis de montrer qu'il pourrait être intéressant d'étudier l'ensemble des matrices \mathbf{G}_m , \mathbf{G}_ρ et \mathbf{G}_ξ lors du choix des configurations de mesure, et non seulement la matrice d'identification \mathbf{G}_ξ . Le choix des configurations de mesure deviendrait alors un problème d'optimisation complexe, et impliquerait certainement le développement de nouveaux indices d'observabilité.

Une première réflexion a aussi été menée sur le choix des poses de vérification pour l'étalonnage. Ces poses sont souvent choisies aléatoirement dans l'espace de travail du manipulateur. Il n'est alors pas possible de garantir la précision finale obtenue après étalonnage. Une façon de procéder pourrait être de déterminer les poses du manipulateur pour lesquelles les performances désirées sont les plus difficiles à obtenir : c'est-à-dire les poses les plus sensibles à un changement dans les paramètres du modèle. Ceci peut être effectué par l'intermédiaire d'une analyse des matrices jacobiniennes issues du modèle à étalonner. Le caractère aléatoire des poses de vérification a cependant une explication : le modèle exact du manipulateur n'étant pas connu, rien ne garantit que les poses de vérification obtenues avec le modèle développé soient réellement celles pour lesquelles les performances du manipulateur sont les moins bonnes. Il faudrait donc pouvoir arriver à montrer que ces poses, déterminées avec le modèle approché, sont tout de même proches des poses qui auraient été obtenues avec le modèle réel. Une telle étude pourrait être menée de manière théorique, ou nécessiterait de pouvoir estimer ou modéliser les erreurs de modélisation. Si une borne sur les erreurs de modélisation peut être obtenue, l'analyse par intervalles pourrait permettre de garantir les performances du manipulateur sur son espace de travail.

La prise en compte des erreurs de modèle lors de l'étalonnage a été introduit dans cette thèse. Nous avons pu voir que les erreurs de modèle pouvaient amener à une modification importante des valeurs des paramètres identifiés. Nous avons aussi vu qu'il était possible dans notre cas de définir des modèles non-paramétriques prenant en compte ces sources d'erreur et

permettant ainsi aux valeurs des paramètres du modèle d'être proches d'une réalité physique. La façon dont l'algorithme d'identification gère ces erreurs de modèle n'a cependant pas - ou peu - été étudiée dans cette thèse. L'étude de ce phénomène nécessiterait une thèse à part entière afin d'en comprendre les rouages et les limitations. D'une part, l'obtention d'une valeur identifiée d'un paramètre ne correspondant à aucune réalité physique peut aussi être due à un manque d'identifiabilité de ce paramètre. Dans ce cas, réussir à discerner une mauvaise identifiabilité des paramètres peut être réalisée par une analyse des valeurs singulières de la matrice d'identification. Cependant, il faut pouvoir définir une valeur seuil avec laquelle comparer les résultats. D'autre part, nous avons vu que l'intégration d'une telle valeur dans le modèle identifié peut tout de même conduire aux performances attendues du manipulateur. Cependant, aucune certification ne peut être donnée ni sur les performances obtenues sur l'ensemble de l'espace de travail, ni sur l'effet du modèle identifié pour garantir un autre critère de performance. Ainsi, l'étude des erreurs de modèle lors de l'étalonnage nécessite tout d'abord d'arriver à répondre à tout ou partie des problématiques énoncées plus haut et semble être un sujet complexe.

En ce qui concerne l'auto-étalonnage à partir des informations disponibles dans l'espace, une seconde campagne de mesures par imagerie a été programmée sous peu et fera l'objet d'une continuité de collaboration entre Thales Alenia Space et INRIA Sophia Antipolis. Cette campagne permettra de valider ou d'infirmer les modèles opto-mécaniques développés, à partir des résultats d'étalonnage par imagerie. Si un modèle opto-mécanique en fonction des points du champ peut être obtenu, il serait alors envisageable de remplacer la plaque multi-trous par un objet ponctuel. Ce dispositif expérimental permettrait de valider l'auto-étalonnage du télescope lorsque celui-ci n'observe qu'un unique point image (par exemple une étoile unique située à l'infini). Nous nous assurerions ainsi de la possibilité d'auto-étalonnage du télescope dans les conditions les plus difficiles, et sans l'aide de capteurs supplémentaires, onéreux et difficiles à mettre en place dans les conditions spatiales.

D'autre part, le projet dans lequel s'inscrit cette thèse prévoit aussi le déploiement du télescope dans l'espace. Nous avons pu observer que l'estimation des coefficients des polynômes de Zernike à partir des mesures par imagerie pouvait être difficile dans le cas de défauts optiques importants, notamment dans le cas d'un fort défaut de focus. Les défauts optiques sont fonctions de l'erreur de positionnement du miroir secondaire par rapport au miroir primaire du télescope. Afin de s'assurer de la possibilité d'auto-étalonnage du télescope dans l'espace, il faudrait donc pouvoir estimer l'erreur maximale de positionnement du miroir secondaire par rapport à sa position optique de qualité optique optimale après le déploiement du télescope. Si cette erreur est jugée trop importante, par exemple par l'intermédiaire d'une campagne de mesure par imagerie, il sera alors possible soit d'améliorer la qualité de l'algorithme qui permet d'extraire les coefficients de Zernike à partir des défauts des images observés, si possible, soit de revenir sur les choix effectués pour la conception du mécanisme de déploiement.

De même, une réflexion pourra être menée sur les synthèses dimensionnelle et architecturale de la plate-forme mobile afin d'en minimiser ses déformations. Ceci permettra de s'affranchir du modèle non-paramétrique de déformation de la plate-forme mobile et conduira sans doute à une amélioration des erreurs de positionnement après étalonnage. De plus, dans l'idéal, les paramètres du modèle identifiés pourraient avoir une réelle signification physique et ainsi être utilisés pour garantir d'autres critères de performance au besoin.

Résultats d'étalonnage par imagerie

A.1 Pour le modèle linéaire en fonction des positions des actionneurs

Les résultats d'étalonnage par imagerie du modèle opto-mécanique linéaire de (6.32) en fonction des positions des actionneurs sont donnés dans Tab. A.1 en fonction de chaque point du champ.

A.2 Pour le modèle quadratique en fonction des positions des actionneurs

Les résultats d'étalonnage par imagerie du modèle opto-mécanique quadratique de (6.33) en fonction des positions des actionneurs sont donnés dans Tab. A.2 en fonction de chaque point du champ.

Position du champ	Valeurs identifiées des paramètres							
410 343	$\mathbf{m}_\rho^o = \begin{bmatrix} -48 \\ 21 \\ -31 \\ -7 \\ -17 \\ -7 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}_\rho = \begin{bmatrix} 445 & 440 & 527 & 444 & 503 & 451 \\ 20 & -8 & -49 & -46 & -35 & -17 \\ 17 & -31 & -36 & 12 & 65 & 61 \\ 45 & 35 & 119 & -187 & -197 & 119 \\ 195 & -176 & -126 & 64 & -48 & 143 \\ 1 & -1 & -13 & -2 & -1 & -7 \\ -11 & -11 & -6 & -13 & -7 & -3 \end{bmatrix}$						
1229 343	$\mathbf{m}_\rho^o = \begin{bmatrix} -96 \\ -7 \\ -12 \\ -15 \\ -17 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}_\rho = \begin{bmatrix} 436 & 439 & 547 & 467 & 531 & 462 \\ 0 & -28 & -40 & -29 & -20 & -15 \\ 2 & -22 & -19 & 15 & 52 & 32 \\ 44 & 41 & 129 & -189 & -195 & 124 \\ 194 & -181 & -130 & 64 & -48 & 141 \\ 1 & -1 & -9 & -1 & 0 & -3 \\ -10 & -10 & -6 & -8 & -6 & -5 \end{bmatrix}$						
2048 343	$\mathbf{m}_\rho^o = \begin{bmatrix} -111 \\ -19 \\ 6 \\ -29 \\ -19 \\ -15 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}_\rho = \begin{bmatrix} 420 & 423 & 540 & 467 & 526 & 453 \\ 22 & -54 & -54 & -23 & -23 & -24 \\ -18 & -10 & -4 & 19 & 33 & -2 \\ 38 & 46 & 136 & -175 & -177 & 123 \\ 192 & -178 & -127 & 69 & -42 & 139 \\ 3 & -3 & -7 & 10 & 10 & -0 \\ -13 & -6 & -3 & -1 & 3 & -11 \end{bmatrix}$						
410 1029	$\mathbf{m}_\rho^o = \begin{bmatrix} -90 \\ 42 \\ 10 \\ -4 \\ -10 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}_\rho = \begin{bmatrix} 454 & 438 & 517 & 443 & 513 & 462 \\ 1 & 1 & -34 & -52 & -61 & -42 \\ 24 & -21 & -43 & -18 & 41 & 54 \\ 44 & 36 & 119 & -190 & -198 & 118 \\ 197 & -184 & -134 & 63 & -51 & 143 \\ 1 & -2 & -11 & 2 & 2 & -9 \\ -14 & -8 & -6 & -14 & -9 & -7 \end{bmatrix}$						
1229 1029	$\mathbf{m}_\rho^o = \begin{bmatrix} -134 \\ 3 \\ 12 \\ -14 \\ -11 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}_\rho = \begin{bmatrix} 444 & 431 & 533 & 457 & 533 & 474 \\ -13 & -12 & -23 & -27 & -33 & -35 \\ 17 & -11 & -27 & -8 & 29 & 32 \\ 46 & 42 & 128 & -191 & -199 & 126 \\ 198 & -186 & -136 & 64 & -52 & 143 \\ 1 & -1 & -7 & 1 & 2 & -7 \\ -10 & -6 & -6 & -11 & -9 & -7 \end{bmatrix}$						
2048 1029	$\mathbf{m}_\rho^o = \begin{bmatrix} -151 \\ -13 \\ 15 \\ -29 \\ -13 \\ -14 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}_\rho = \begin{bmatrix} 429 & 414 & 531 & 463 & 539 & 475 \\ -33 & -35 & -26 & -13 & -23 & -40 \\ 6 & 9 & 1 & 1 & 15 & 6 \\ 43 & 47 & 139 & -175 & -179 & 129 \\ 196 & -181 & -131 & 67 & -47 & 141 \\ 1 & 1 & -3 & 10 & 10 & -4 \\ -11 & -0 & 0 & -6 & -3 & -9 \end{bmatrix}$						
410 1715	$\mathbf{m}_\rho^o = \begin{bmatrix} -113 \\ 38 \\ 46 \\ -3 \\ -4 \\ -9 \\ 13 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}_\rho = \begin{bmatrix} 455 & 430 & 508 & 436 & 524 & 477 \\ -9 & 12 & -14 & -43 & -65 & -55 \\ 34 & -8 & -53 & -42 & 17 & 44 \\ 41 & 37 & 120 & -192 & -199 & 117 \\ 194 & -185 & -137 & 62 & -50 & 140 \\ 3 & -2 & -10 & 4 & 2 & -7 \\ -13 & -8 & -8 & -10 & -8 & -10 \end{bmatrix}$						
1229 1715	$\mathbf{m}_\rho^o = \begin{bmatrix} -156 \\ -1 \\ 34 \\ -14 \\ -5 \\ -9 \\ 13 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}_\rho = \begin{bmatrix} 449 & 425 & 520 & 451 & 542 & 487 \\ -19 & 1 & -2 & -14 & -37 & -50 \\ 33 & 8 & -30 & -26 & 11 & 29 \\ 46 & 41 & 127 & -191 & -198 & 125 \\ 196 & -185 & -138 & 61 & -51 & 140 \\ 3 & 1 & -5 & 2 & 1 & -6 \\ -7 & -6 & -7 & -10 & -11 & -9 \end{bmatrix}$						
2048 1715	$\mathbf{m}_\rho^o = \begin{bmatrix} -172 \\ -20 \\ 24 \\ -28 \\ -6 \\ -14 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}_\rho = \begin{bmatrix} 435 & 407 & 516 & 458 & 545 & 487 \\ -41 & -16 & 1 & 5 & -22 & -57 \\ 27 & 32 & 9 & -14 & -1 & 11 \\ 47 & 45 & 135 & -175 & -182 & 132 \\ 195 & -182 & -134 & 62 & -51 & 139 \\ -0 & 6 & 2 & 9 & 10 & -5 \\ -7 & 0 & -0 & -10 & -11 & -8 \end{bmatrix}$						

TABLE A.1 – Résultats d'étalonnage pour le modèle linéaire de (6.32)

Position	Valeurs identifiées des paramètres																	
410 343	$\mathbf{a}_\rho^o = \begin{bmatrix} -15 \\ 7 \\ -38 \\ -11 \\ -18 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^1 = \begin{bmatrix} 486 & 525 & 475 & 467 & 523 & 467 \\ 20 & -26 & 3 & -22 & 82 & -19 \\ 20 & -29 & -42 & 7 & 91 & 68 \\ 41 & 28 & 136 & -182 & -188 & 120 \\ 197 & -177 & -117 & 82 & -34 & 149 \\ 3 & 6 & -5 & 3 & 24 & -1 \\ -12 & -15 & -7 & -17 & 14 & 2 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^2 = \begin{bmatrix} 0 & -166 & -96 & -3 & -15 & -19 \\ -2 & 97 & 56 & -29 & -131 & -11 \\ 30 & -18 & -4 & 4 & -33 & 23 \\ -3 & 18 & 26 & -10 & -11 & 9 \\ -1 & 15 & 7 & -24 & -14 & 10 \\ -2 & -12 & 9 & -5 & -28 & 11 \\ 6 & 6 & 0 & 4 & -26 & 17 \end{bmatrix}$															
1229 343	$\mathbf{a}_\rho^o = \begin{bmatrix} -64 \\ -14 \\ -20 \\ -19 \\ -18 \\ -11 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^1 = \begin{bmatrix} 478 & 522 & 496 & 499 & 564 & 481 \\ 6 & -33 & -6 & -4 & 64 & -14 \\ 2 & -26 & -30 & 2 & 68 & 37 \\ 40 & 33 & 138 & -186 & -187 & 128 \\ 195 & -180 & -125 & 76 & -36 & 146 \\ 4 & 4 & -1 & 7 & 30 & 5 \\ -12 & -15 & -10 & -9 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^2 = \begin{bmatrix} -3 & -151 & -97 & -14 & -30 & -14 \\ 4 & 57 & 33 & -31 & -93 & -10 \\ 32 & -15 & -7 & 14 & -23 & 23 \\ -2 & 17 & 14 & -7 & -10 & 14 \\ -6 & 11 & 3 & -14 & -12 & 6 \\ 4 & -5 & 8 & -10 & -34 & 15 \\ -5 & 14 & -5 & 1 & -9 & 10 \end{bmatrix}$															
2048 343	$\mathbf{a}_\rho^o = \begin{bmatrix} -87 \\ -40 \\ -10 \\ -29 \\ -16 \\ -16 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^1 = \begin{bmatrix} 461 & 498 & 493 & 499 & 573 & 477 \\ -18 & -74 & -22 & 6 & 65 & -16 \\ -21 & -23 & -7 & 3 & 76 & 7 \\ 35 & 42 & 137 & -172 & -176 & 126 \\ 194 & -176 & -123 & 83 & -36 & 143 \\ 5 & 4 & -1 & 15 & 43 & 7 \\ -14 & -9 & -7 & 2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^2 = \begin{bmatrix} 23 & -145 & -87 & -19 & -49 & 5 \\ 45 & 67 & 40 & -45 & -101 & 26 \\ 41 & 4 & 5 & 14 & -55 & 39 \\ -17 & 16 & -0 & -3 & -0 & 7 \\ -13 & 10 & -0 & -16 & -4 & 1 \\ -5 & -5 & 4 & -4 & -37 & 12 \\ -10 & 12 & -7 & -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$															
410 1029	$\mathbf{a}_\rho^o = \begin{bmatrix} -58 \\ 35 \\ 4 \\ -7 \\ -9 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^1 = \begin{bmatrix} 497 & 525 & 470 & 475 & 554 & 484 \\ 7 & -8 & 1 & -24 & 30 & -45 \\ 24 & -21 & -49 & -37 & 63 & 56 \\ 40 & 31 & 136 & -185 & -190 & 119 \\ 199 & -182 & -126 & 74 & -39 & 146 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & 30 & -1 \\ -14 & -10 & -10 & -14 & -8 & -5 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^2 = \begin{bmatrix} -1 & -163 & -91 & -14 & -39 & -8 \\ 3 & 74 & 33 & -33 & -100 & -20 \\ 27 & -22 & -2 & 23 & -29 & 14 \\ -4 & 14 & 23 & -10 & -9 & 7 \\ -7 & 9 & 6 & -14 & -12 & 2 \\ 5 & -9 & 12 & -12 & -32 & 17 \\ 2 & 4 & -5 & -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$															
1229 1029	$\mathbf{a}_\rho^o = \begin{bmatrix} -101 \\ -4 \\ 7 \\ -18 \\ -10 \\ -13 \\ 11 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^1 = \begin{bmatrix} 488 & 519 & 480 & 487 & 571 & 495 \\ -5 & -20 & 2 & 3 & 54 & -33 \\ 16 & -13 & -33 & -20 & 48 & 35 \\ 42 & 34 & 135 & -188 & -195 & 130 \\ 199 & -185 & -129 & 74 & -41 & 145 \\ 4 & 3 & -2 & 8 & 30 & 3 \\ -12 & -10 & -6 & -9 & -9 & -6 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^2 = \begin{bmatrix} 2 & -165 & -99 & -11 & -35 & -11 \\ 6 & 66 & 19 & -34 & -96 & -9 \\ 15 & -6 & -5 & 14 & -24 & 14 \\ -2 & 15 & 11 & -7 & -6 & 16 \\ -11 & 13 & 6 & -11 & -10 & 0 \\ 12 & -7 & 7 & -10 & -33 & 22 \\ -9 & 14 & -2 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$															
2048 1029	$\mathbf{a}_\rho^o = \begin{bmatrix} -126 \\ -31 \\ 3 \\ -28 \\ -11 \\ -15 \\ 11 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^1 = \begin{bmatrix} 472 & 494 & 476 & 494 & 578 & 498 \\ -28 & -53 & -4 & 19 & 66 & -30 \\ 5 & 3 & 1 & -8 & 61 & 14 \\ 40 & 43 & 140 & -173 & -186 & 130 \\ 197 & -180 & -123 & 77 & -40 & 142 \\ 4 & 6 & -2 & 13 & 33 & 3 \\ -12 & -3 & 1 & -3 & -9 & -9 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^2 = \begin{bmatrix} 28 & -157 & -97 & -16 & -39 & 1 \\ 32 & 73 & 22 & -44 & -102 & 23 \\ 32 & 1 & 6 & 8 & -56 & 30 \\ -17 & 16 & 1 & -3 & 8 & 1 \\ -14 & 12 & 5 & -11 & -6 & -4 \\ 4 & -11 & 1 & -4 & -26 & 15 \\ -9 & 12 & -1 & -4 & 7 & -3 \end{bmatrix}$															
410 1715	$\mathbf{a}_\rho^o = \begin{bmatrix} -81 \\ 30 \\ 41 \\ -5 \\ -3 \\ -11 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^1 = \begin{bmatrix} 499 & 521 & 462 & 468 & 562 & 497 \\ -0 & 7 & 22 & -11 & 29 & -56 \\ 32 & -9 & -61 & -66 & 35 & 45 \\ 38 & 34 & 137 & -185 & -193 & 117 \\ 196 & -182 & -130 & 71 & -39 & 142 \\ 5 & 4 & 4 & 13 & 32 & 0 \\ -14 & -10 & -12 & -10 & -16 & -9 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^2 = \begin{bmatrix} 6 & -173 & -90 & -13 & -36 & -12 \\ 6 & 66 & 32 & -37 & -104 & -15 \\ 19 & -20 & -3 & 31 & -25 & 11 \\ -6 & 11 & 23 & -10 & -6 & 3 \\ -8 & 6 & 4 & -10 & -11 & -2 \\ 3 & -8 & 16 & -11 & -34 & 17 \\ -2 & 4 & -5 & -0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$															
1229 1715	$\mathbf{a}_\rho^o = \begin{bmatrix} -122 \\ -9 \\ 29 \\ -16 \\ -4 \\ -13 \\ 13 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^1 = \begin{bmatrix} 492 & 511 & 475 & 485 & 577 & 506 \\ -11 & -7 & 30 & 23 & 55 & -46 \\ 32 & 7 & -34 & -42 & 33 & 31 \\ 42 & 35 & 140 & -185 & -196 & 127 \\ 197 & -183 & -131 & 70 & -41 & 141 \\ 5 & 5 & 4 & 8 & 29 & 2 \\ -9 & -10 & -6 & -7 & -16 & -9 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^2 = \begin{bmatrix} -7 & -155 & -91 & -15 & -30 & -17 \\ -1 & 74 & 27 & -44 & -100 & -7 \\ 13 & -11 & -2 & 20 & -29 & 10 \\ -9 & 17 & 18 & -10 & -2 & 8 \\ -6 & 7 & 6 & -10 & -10 & -2 \\ 8 & -7 & 12 & -9 & -33 & 19 \\ -7 & 11 & 2 & -5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$															
2048 1715	$\mathbf{a}_\rho^o = \begin{bmatrix} -143 \\ -35 \\ 17 \\ -28 \\ -6 \\ -16 \\ 11 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^1 = \begin{bmatrix} 477 & 487 & 462 & 491 & 579 & 509 \\ -34 & -33 & 23 & 42 & 67 & -48 \\ 27 & 29 & 7 & -25 & 32 & 15 \\ 43 & 40 & 141 & -174 & -185 & 132 \\ 195 & -182 & -126 & 69 & -42 & 140 \\ 1 & 11 & 5 & 11 & 34 & 1 \\ -9 & -4 & 4 & -6 & -14 & -8 \end{bmatrix}$	$\mathbf{Q}_\rho^2 = \begin{bmatrix} 13 & -153 & -98 & -18 & -32 & -3 \\ 26 & 79 & 19 & -50 & -100 & 16 \\ 17 & -2 & 1 & 13 & -42 & 16 \\ -14 & 14 & 7 & -1 & 4 & 0 \\ -7 & 9 & 8 & -8 & -9 & -3 \\ 4 & -11 & 3 & -1 & -28 & 14 \\ -6 & 12 & 5 & -6 & 5 & 0 \end{bmatrix}$															

TABLE A.2 – Résultats d'étalonnage pour le modèle quadratique de (6.33)

Bibliographie

- [Abt10] M. Abtahi, H. Pendar, A. Alasty, and G. Vossoughi. Experimental kinematic calibration of parallel manipulators using a relative position error measurement system. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 26(6) :799 – 804, 2010.
- [AdS13] J. Alexandre dit Sandretto. *Étalonnage des robots à câbles, identification et qualification*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2013.
- [And01] N. Andreff, R. Horaud, and B. Espiau. Robot hand-eye calibration using structure-from-motion. *The International Journal of Robotics Research*, 20(3) :228–248, 2001.
- [And08] N. Andreff and I. Dressler. Closed-form calibration of the Gantry-Tau parallel robot. In *Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 993–998. Nice, France, Sept 2008.
- [Are12] P. D. Arendt, D. W. Apley, and W. Chen. Quantification of model uncertainty : Calibration, model discrepancy, and identifiability. *Journal of Mechanical Design*, 134(10) :100908–1 – 100908–12, 2012.
- [Bar78] M. Baret. Six degrees of freedom large motion system for flight simulators. In *AGARD Piloted Aircraft Environ. Simulation Tech., Bruxelles*. 1978.
- [Bar08] C. Baradat, V. Nabat, O. Company, S. Krut, and F. Pierrot. Par2 : a Spatial Mechanism for Fast Planar, 2-dof, Pick-and-Place Applications. In *Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, p. 10. Montpellier, France, 2008.
- [Beh88] F. Behi. Kinematic analysis for a six-degree-of-freedom 3-PRPS parallel mechanism. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 4(5) :561–565, 1988.
- [Bes99] S. Besnard and W. Khalil. Calibration of parallel robots using two inclinometers. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 3, pp. 1758–1763. Detroit, MI, 1999.
- [Bes01] S. Besnard and W. Khalil. Identifiable parameters for parallel robots kinematic calibration. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 3, pp. 2859–4729. Seoul, Korea, 2001.
- [Bla05] L. Blanchard, F. Falzon, J. Dupuis, and J.-P. Merlet. Deployable hexapod using tape-springs. Technical report, DTIC Document, 2005.
- [Bog95] P. T. Boggs and J. W. Tolle. Sequential quadratic programming. *Acta Numerica*, 4 :1–51, 1995.
- [Bon00] I. A. Bonev and J. Ryu. A new method for solving the direct kinematics of general 6-6 Stewart platforms using three linear extra sensors. *Mechanism and Machine Theory*, 35 :423–436, 2000.
- [Bor91] J. Borm and C. Menq. Determination of optimal measurement configurations for robot calibration based on observability measurements. *The International Journal of Research*, 10(1) :51–63, 1991.

- [Bri07] S. Briot and I. A. Bonev. Are parallel robots more accurate than serial robots? *Transactions of the Canadian Society For Mechanical Engineering*, 31(4) :445–455, 2007.
- [Che04] L. Chevalier. *Mécanique des systèmes et des milieux déformables*. Ellipses edition, 2004.
- [Che11] G. Chen, X. Liu, and Y. Du. Elliptical-arc-fillet flexure hinges : Toward a generalized model for commonly used flexure hinges. *ASME Journal of Mechanical Design*, 133(8) :081002–1 – 081002–9, 2011.
- [Che12] C. Chen, T. Gayral, S. Caro, D. Chablat, G. Moroz, and S. Abeywardena. A six degree of freedom epicyclic-parallel manipulator. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 4(4) :041011–1 – 041011–8, 2012.
- [Cla91] R. Clavel. *Conception d’un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté*. PhD thesis, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne EPFL, 1991.
- [Cor08] D. Corbel. *Contribution à l’amélioration de la précision des robots parallèles*. PhD thesis, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2008.
- [Dan99] D. Daney. Self calibration of Gough platform using leg mobility constraints. In *Proc. of the 10th world congress on the theory of machine and mechanisms*, pp. 104–109. 1999.
- [Dan00] D. Daney. *Étalonnage géométrique des robots parallèles*. PhD thesis, Nice - Sophia Antipolis, 2000.
- [Dan03] D. Daney. Kinematic calibration of the Gough platform. *Robotica*, 21(6) :667–690, 2003.
- [Dan05] D. Daney, Y. Papegay, and B. Madeline. Choosing measurement poses for robot calibration with the local convergence method and Tabu search. *Int. Journal of Robotics Research*, 24(6) :501–518, 2005.
- [Dan06] D. Daney, N. Andreff, G. Chabert, and Y. Papegay. Interval method for calibration of parallel robots : Vision based experiments. *Mechanism and Machine Theory*, 41 :929–944, 2006.
- [Den55] J. Denavit and R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. of the ASME Journal of Applied Mechanics*, 22 :215–221, 1955.
- [Don05] W. Dong, Z. Du, and L. Sun. Conceptual design and kinematics modeling of a wide-range flexure hinge-based parallel manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 4031 – 4036. Barcelona, Spain, 2005.
- [Dro11] C. Drouin, S. Miossec, G. Poisson, and L. Nouaille. Comparaison des performances de deux robots sphériques à architecture série et parallèle selon des critères cinématiques et géométriques. In *20ème Congrès Français de Mécanique*. Besançon, France, 2011.
- [Eve87] L. J. Everett, M. Driels, and B. W. Mooring. Kinematic modelling for robot calibration. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 4, pp. 183 – 189. Raleigh NC USA, 1987.

- [Faz06] N. Fazenda, E. Lubrano, S. Rossopoulos, and R. Clavel. Calibration of the 6 DOF high-precision flexure parallel robot "Sigma 6". In *Parallel Kinematic Machines in Research and Practice*, pp. 379–398. Neugebauer Reimund, Chemnitz, 2006.
- [Gar06] J. Gardner, J. Mather, M. Clampin, R. Doyon, M. Greenhouse, H. Hammel, J. Hutchings, P. Jakobsen, S. Lilly, K. Long, J. Lunine, M. Mccaughrean, M. Mountain, J. Nella, G. Rieke, M. Rieke, H.-W. Rix, E. Smith, G. Sonneborn, M. Stiavelli, H. Stockman, R. Windhorst, and G. Wright. The James Webb space telescope. *Space Science Reviews*, 123(4) :485–606, 2006.
- [Ger11] C. Germain, S. Briot, S. Caro, and P. Wenger. Irsbot-2 : Un nouveau robot parallèle à deux degrés de liberté pour des applications de manipulation rapide. In *20ème Congrès Français de Mécanique*. Besançon, France, 2011.
- [Gil06] M. Gilli. Méthodes numériques, 2006.
- [Gou56] V. Gough. Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and tyre performance. In *Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng.*, volume 171, pp. 392–394. 1956.
- [Gou11] M. Gouttefarde, D. Daney, and J.-P. Merlet. Interval-analysis-based determination of the wrench-feasible workspace of parallel cable-driven robots. *IEEE Trans. on Robotics*, 27(1) :1–13, 2011.
- [Har89] R. M. Haralick, H. Joo, C.-N. Lee, X. Zhuang, V. G. Vaidya, and M. B. Kim. Pose estimation from corresponding point data. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 19(6) :1426 –1446, 1989.
- [Hen03] S. Henein, P. Spanoudakis, S. Droz, L. I. Myklebust, and E. Onillon. Flexure pivot for aerospace mechanisms. In *10th European Space Mechanisms and Tribology Symposium*, pp. 285–288. San Sebastian, Spain, 2003.
- [Her81] J. Herrmann. Cross coupling and aliasing in modal wave-front estimation. *Journal of the Optical Society of America*, 71(8) :989–992, 1981.
- [Hol93] J. M. Hollerbach. Advances in robot calibration. In *6th Int. Symposium on Robotics Research*, p. 319–326. Hidden Valley, PA, 1993.
- [Hol96] J. M. Hollerbach and C. W. Wampler. The calibration index and taxonomy for robot kinematic calibration methods. *The International Journal of Robotics Research*, 15(6) :573 – 591, 1996.
- [Hol08] J. Hollerbach, W. Khalil, and M. Gautier. *Handbook of Robotics*, chapter 14. Springer, 2008.
- [HS81] V. Hachemi-Safa i. *Étude du comportement dynamique non linéaire des risiers pour les grandes profondeurs soumis au courant et à la houle*. PhD thesis, 1981.
- [Hus96] M. L. Husty. An algorithm for solving the direct kinematics of general stewart-gough platforms. *Mechanism and Machine Theory*, 31(4) :365 – 379, 1996.
- [ift03] IFToMM terminology/francais 1.1. *Mechanism and Machine Theory*, 38(7–10) :903 – 912, 2003.

- [Iki97] M. Ikits and J. M. Hollerbach. Kinematic calibration using a plane constraint. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 4, pp. 3191–3196. Albuquerque NM, USA, 1997.
- [Jia08] Q. Jiang and C. M. Gosselin. The maximal singularity-free workspace of the Gough–Stewart platform for a given orientation. *Journal of Mechanical Design*, 130(11) :112304–1 – 112304–8, 2008.
- [Jou13] A. Joubair, M. Slamani, and I. A. Bonev. Kinematic calibration of a five-bar planar parallel robot using all working modes. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 29(4) :15 – 25, 2013.
- [Kha86] W. Khalil and J.-F. Kleinfinger. A new geometric notation for open and closed-loop robots. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 3, pp. 1174–1179. San Fransisco, California, 1986.
- [Kha99] W. Khalil and S. Besnard. Self calibration of Stewart-Gough parallel robots without extra sensors. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 15(6) :1116 –1121, 1999.
- [Koh88] D. Kohli, G. N. Sandor, S.-H. Lee, and K.-Y. Tsai. Manipulator configurations based on rotary-linear (R-L) actuators and their direct and inverse kinematics. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 110(4) :397–404, 1988.
- [Lub11] E. Lubrano, M. Bouri, and R. Clavel. Ultra-high-precision industrial robots calibration. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 228 – 233. Shanghai, 2011.
- [Mar63] D. W. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2) :431–441, 1963.
- [Mas93] O. Masory, J. Wang, and H. Zhuang. On the accuracy of a Stewart platform - Part II. Kinematic calibration and compensation. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 1, pp. 725–731. Atlanta, GA, 1993.
- [Mas97] O. Masory, J. Wang, and H. Zhuang. Kinematic modeling and calibration of a Stewart platform. *Advanced Robotics*, 11(5) :519–539, 1997.
- [Men03] G. Meng, L. Tiemin, and Y. Wensheng. Calibration method and experiment of Stewart platform using a laser tracker. In *IEEE Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics*, volume 3, pp. 2797 – 2802. Washington, DC, USA, 2003.
- [Mer] J.-P. Merlet. ALIAS. <http://www-sop.inria.fr/coprin/developpements/main.html>.
- [Mer91a] J.-P. Merlet. Articulated device, for use in particular in robotics. U.S. Patent 5,053,687, 1991.
- [Mer91b] J.-P. Merlet and C. M. Gosselin. Nouvelle architecture pour un manipulateur parallèle a six degrés de liberté. *Mechanism and Machine Theory*, 26(1) :77 – 90, 1991.
- [Mer93a] J.-P. Merlet. Closed-form resolution of the direct kinematics of parallel manipulators using extra sensors data. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 1, pp. 200–204. 1993.

- [Mer93b] J.-P. Merlet. Direct kinematics of parallel manipulators. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 9(6) :842–846, 1993.
- [Mer04] J. P. Merlet. Solving the forward kinematics of a Gough-type parallel manipulator with interval analysis. *The Int. Journal of Robotics Research*, 23(3) :221–235, 2004.
- [Mer05a] J. P. Merlet. Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots. *Journal of Mechanical Design*, 128(1) :199–206, 2005.
- [Mer05b] J.-P. Merlet and D. Daney. Dimensional synthesis of parallel robots with a guaranteed given accuracy over a specific workspace. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 942–947. Barcelona, Spain, 2005.
- [Mer06a] J.-P. Merlet. Computing the worst case accuracy of a PKM over a workspace or a trajectory. In *The 5th Chemnitz Parallel Kinematics Seminar*, p. 83–96. Germany, 2006.
- [Mer06b] J.-P. Merlet. *Parallel Robots, 2nd Edition*, volume 128. Springer, 2006.
- [Moo86] B. Mooring and T. J. Pack. Determination and specification of robot repeatability. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 3, pp. 1017–1023. 1986.
- [Moo89] B. W. Mooring and S. S. Padavala. The effect of kinematic model complexity on manipulator accuracy. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 1, pp. 593–598. Scottsdale, AZ, 1989.
- [Moo91] B. Mooring, M. Driels, and Z. Roth. *Fundamentals of Manipulator Calibration*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1991.
- [Nah94] A. Nahvi, J. M. Hollerbach, and V. Hayward. Calibration of a parallel robot using multiple kinematic closed loops. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 1, pp. 407–412. San Diego, CA, USA, 1994.
- [Nah96] A. Nahvi and J. M. Hollerbach. The noise amplification index for optimal pose selection in robot calibration. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 1, pp. 647–654. Minneapolis, Minnesota, 1996.
- [Nia04] T. Niaritsiry, N. Fazenda, and R. Clavel. Study of the sources of inaccuracy of a 3 DOF flexure hinge-based parallel manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 4, pp. 4091–4096. New Orleans, 2004.
- [Nol76] R. J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *Journal of the Optical Society of America*, 66(3) :207–211, 1976.
- [Pas09] A. Pashkevich, D. Chablat, and P. Wenger. Stiffness analysis of overconstrained parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 44(5) :966–982, 2009.
- [Pat00] A. J. Patel and K. F. Ehmann. Calibration of a hexapod machine tool using a redundant leg. *Int. Journal of Machine Tools and Manufacture*, 40(4) :489–512, 2000.
- [Rag93] M. Raghavan. The Stewart platform of general geometry has 40 configurations. *Journal of Mechanical Design*, 115(2) :277–282, 1993.

- [Ren03a] P. Renaud. *Apport de la vision pour l'identification géométrique de mécanismes parallèles*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2003.
- [Ren03b] P. Renaud, N. Andreff, G. Gogu, and M. Dhome. Optimal pose selection for vision-based kinematic calibration of parallel mechanisms. In *Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, volume 3, pp. 2223–2228. 2003.
- [Ste65] D. Stewart. A platform with six degrees of freedom. *Proc. of the institution of mechanical engineers*, 180(1) :371–386, 1965.
- [Sun08] Y. Sun and J. M. Hollerbach. Observability index selection for robot calibration. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 831–836. Pasadena, CA, 2008.
- [Tak04] Y. Takeda, G. Shen, and H. Funabashi. A DBB-based kinematic calibration method for in-parallel actuated mechanisms using a Fourier series. *ASME Journal of Mechanical Design*, 126(5) :856–865, 2004.
- [Tay03] R. Taylor and D. Stoianovici. Medical robotics in computer-integrated surgery. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 19(5) :765–781, 2003.
- [Ver05] M. Verner, F. Xi, and C. Mechefske. Optimal calibration of parallel kinematic machines. *Journal of Mechanical Design*, 127(1) :62–69, 2005.
- [Vis96] P. Vischer. *Improving the Accuracy of Parallel Robots*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1996.
- [Vis98] P. Vischer and R. Clavel. Kinematic calibration of the parallel Delta robot. *Robotica*, 16 :207–218, 1998.
- [Wam95] C. W. Wampler, J. M. Hollerbach, and T. Arai. An implicit loop method for kinematic calibration and its application to closed-chain mechanisms. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 11(5) :710–724, 1995.
- [Wan93] J. Wang and O. Masory. On the accuracy of a Stewart platform - Part I. The effect of manufacturing tolerances. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 1, pp. 114–120. Atlanta, GA, 1993.
- [Zel09] S. Zelenika, M. G. Munteanu, and F. D. Bona. Optimized flexural hinge shapes for microsystems and high-precision applications. *Mechanism and Machine Theory*, 44(10) :1826 – 1839, 2009.
- [Zha02] W. J. Zhang, J. Zou, L. G. Watson, W. Zhao, G. H. Zong, and S. S. Bi. The constant-jacobian method for kinematics of a three-DOF planar micro-motion stage. *Journal of Robotic Systems*, 19(2) :63–72, 2002.
- [Zhu93] H. Zhuang and Z. S. Roth. Method for kinematic calibration of Stewart platforms. *Journal of Robotic Systems*, 10(3) :391–405, 1993.
- [Zhu94] H. Zhuang, K. Wang, and Z. S. Roth. Optimal selection of measurement configurations for robot calibration using simulated annealing. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 393–398. San Diego, CA, USA, 1994.
- [Zhu96a] H. Zhuang and L. Liu. Self-calibration of a class of parallel manipulators. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 2, pp. 994–999. Minneapolis, MN, 1996.

-
- [Zhu96b] H. Zhuang, J. Wu, and W. Huang. Optimal planning of robot calibration experiments by genetic algorithms. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, volume 2, pp. 981–986. Minneapolis, MN, USA, 1996.
- [Zhu97] H. Zhuang. Self-calibration of parallel mechanisms with a case study on Stewart platforms. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 13(3) :387–397, 1997.
- [Zla98] D. Zlatanov, R. G. Fenton, and B. Benhabib. Identification and classification of the singular configurations of mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 33(6) :743–760, 1998.